

- Newton 5, 19, 20, 30, 32, 33, 35, 36—38, 41, 42, 43—47, 49 f., 50 f., 52, 53, 55, 57, 58, 59, 67, 69.  
 Newtonianer 29, 46, 52.  
 Nieuwentijt 30.  
 (denk-)notwendig 60, 63, 64, 69.  
 »number« 24, 26.  
 objektiv 59, 60, 61.  
 Pappus 14.  
 Pascal 16, 17 f.  
 »Philalethes C.« 44.  
 Philosophie der Mathematik 6, 7, 23, 32, 33, 59, 69.  
 Plato 11 f., 61.  
 Punkt 18, 19, 37, 43, 52, 56, 57, 65, 67, 68.  
 Quadratrix 11, 13.  
 Quadratur 10, 13, 14, 16, 17, 53, 68.  
 Quadrivium 61 f.  
 Quellenschriften (von Berk.) 6, 8.  
 »rationes primae et ultimae« 37, 42, 50, 55, 58, 59.  
 Raum 62, 63, 64.  
 »Reasons« 3, 53.  
 Rechenkunst 14, 26.  
 Rektifikation 13.  
 Religion 9, 33, 34, 35 f., 40, 47, 54.  
 richtig 59, 60.  
 Riehl 5, 22.  
 Roberval 16, 17, 18.  
 Robins 55, 58.  
 Rolle 48.  
 Sampson 3, 50, 53.  
 »scaffold of building« 53.  
 Schema 63, 64, 65.  
 »science« 42, 48, 49, 51.  
 — »considered as practical« 25, 31, 33, 44.  
 de Sluse 18.  
 Spengler 5, 9 f.  
 Stammler, Rudolf 5 f., 10, 59, 61.  
 Stoff 59, 60, 61, 63.  
 Stone 20, 39.  
 subjektiv 60.  
 Subjektivismus 60, 69.  
 Subjektivität 69.  
 Subtangente 14, 49.  
 Symbole 50, 51.  
 systematisch und genetisch 25 f.  
 Tagebuch 6, 8, 14, 24, 26, 68.  
 Tangente 13, 14, 17, 18, 48.  
 Tangentenmethode 18.  
 Tangentenproblem 13 f., 16, 17, 18.  
 Technik 10, 51.  
 Theorie 10, 44.  
 »Treatise« 3, 6, 8, 9, 21—33, 44.  
 —, (Hauptlehren) 21—23.  
 —, (Metaphys. d. Mathem.) 23—33.  
 »triangulum charact.« 18, 19.  
 Ueberweg 5, 29, 60.  
 »unendlich-klein« 16, 17, 20, 29, 32, 43, 50, 67, 68.  
 »usefulness« 20, 31, 41, 42, 44, 51.  
 »velocities« (Fluxionen) 37, 50, 52, 56.  
 Verschiedenheit (Newton — de l'Hospital) 39, 43, 46, 49, 50.  
 Vieta 17.  
 Vorstellung 62, 63, 64, 66.  
 Vorstellungskraft 63.  
 Vorstellungsweise (Baumann) 48.  
 Wallis 18.  
 Walton 55.  
 Weber 5, 52.  
 Wissenschaft 10, 20, 25, 26, 43, 44, 47, 51, 55, 59—61, 64, 65, 66, 68, 69.  
 wissenschaftlich 9, 21, 41, 42, 50, 60 f., 63, 68.  
 Wissenschaftlichkeit 8, 36, 54.  
 »without the mind« 22, 23, 27.  
 Zahl 10, 17, 24, 62, 63, 64, 65, 68, 69.  
 —, natürliche 63, 64, 65, 66.  
 —, reelle 64, 65, 66.  
 Zahlbegriff 62, 64.  
 Zahlenfolge 65 f.  
 —, unendliche 66, 67, 69.  
 Zeit 50, 57, 62, 63 f.  
 Ziehen 5, 66.

„Kant-Studien“  
 Ergänzungshefte im Auftrag der Kant-Gesellschaft  
 herausg. von H. Vaihinger, M. Frischeisen-Köhler und A. Liebert. Nr. 56.

# Der Raum.

## Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre

von

**Dr. Rudolf Carnap,**

Buchenbach (Baden).



Berlin,

Verlag von Reuther & Reichard

1922.

## Inhalt.

	Seite
<b>Einleitung.</b> Die drei Bedeutungen des Raumes . . . . .	5
<b>I. Der formale Raum (<math>R</math>)</b> . . . . .	7
Seine Bedeutung. Urteil. Begriff. Beziehung (Seite 7). — (Mathem. Funktion). Beziehungslehre. Anzahl. Reihe. Ordnungszahl. Kontinuum (10). — Mehrstufige Reihe: der Raum. $R_t, R_{3p}$ (13). — Uebersicht der Raumarten (15). — Beispiele: Farben; Urteile; Punkte und Geraden; Kreise und Kreisbüschel (17).	
<b>II. Der Anschauungsraum (<math>R'</math>)</b> . . . . .	22
Wesenserschauung. Beschränktheit des Anschauungsgebietes. Die Grundsätze (22). — Erweiterung zum Gesamtgefüge. Die Forderungen (26). — Krümmungsmaß; die Arten des $R'_{3m}$ (27). — Verallgemeinerung: $R'_{nm}, R'_{3t}, R'_{nt}$ (30).	
<b>III. Der physiche Raum (<math>R''</math>)</b> . . . . .	32
Die physiche Gerade. Geradensetzung. Maßsetzung; $M_1, M_0$ (32). — $R'_{3t}, R'_{3m}$ . Tatbestand (38). — Wahl der Maßsetzung, danach $R''$ bestimmt. Beispiel: Ausmessung der Fläche $f$ (40). — Wahl von $R''$ , danach Maßsetzung bestimmt. Beispiel: Erde als Ebene (46). — Gegenseitige Abhängigkeit von Raumart, Maßsetzung und Tatbestand. Möglichste Einfachheit für $R$ oder $M$ ? Beides nicht, sondern für Gesamtdarstellung. Beispiel: Relativitätstheorie (54).	
<b>IV. Das gegenseitige Verhältnis von formalem, Anschauungs- und physischem Raum</b> . . . . .	60
Einsetzung und Unterordnung. Logik — Größenlehre — Physik. Zweck des Aufbaues der Raumarten.	
<b>V. Die Beziehungen zwischen Raumerkenntnis und Erfahrung</b> . . . . .	63
a) Die Quellen der Erkenntnis vom Raume . . . . .	63
Die Erkenntnisquellen der drei Raumbedeutungen. Kant: synthetische Sätze a priori. Quellenformeln.	
b) Der Raum als Bedingung der Erfahrung . . . . .	65
Welche Raumbestimmungen sind erfahrungsbegründend? Nur die topologischen, und zwar des Anschauungsraumes, und damit des formalen. Eindeutigkeit; daraus folgt weder: euklidischer Raum, noch: dreistufiger Raum. Ergebnis: $R'_{nt}$ , und damit auch $R_{nt}$ enthalten die Möglichkeitsbedingungen des Erfahrungsgegenstandes.	
<b>Anhang I: Literatur-Verzeichnis</b> . . . . .	68
<b>Anhang II: Literatur-Hinweise</b> . . . . .	78

Alle Rechte vorbehalten.

## Einleitung.

Die Antworten des letzten Jahrhunderts auf die Frage nach der Erkenntnisquelle, der Art des Gegenstandes und dem Geltungsbereich der Raumlehre stehen bekanntlich in sehr auffälligen Widersprüchen zu einander. Sowohl von philosophischer, wie von mathematischer und physikalischer Seite ist diesen Fragen eine besondere Aufmerksamkeit zuteil geworden, da einerseits die allgemeine Erkenntnisfrage eng mit ihr verknüpft ist, andererseits der Aufbau der mathematischen Wissenschaften vom Raume auf gesicherter Grundlage eine Beantwortung unumgänglich erfordert.

Daß jene Widersprüche sich gerade in den Auffassungen der hervorragendsten Vertreter der genannten Wissenschaften finden, dürfte die Vermutung nahelegen, daß in diesem Falle doch wohl nicht ›die Wahrheit in der Mitte liegt‹, was ja genau genommen die Falschheit aller streitenden Ansichten bedeutet. Und in der Tat lehrt die nähere Untersuchung der Frage, daß der Anschein des Widerspruches nur dadurch entstanden ist, daß auf den verschiedenen Seiten von sehr verschiedenen Gegenständen die Rede ist.

Um den Sachverhalt zu klären, sollen deshalb hier die verschiedenen Bedeutungen des Raumes und die bei jeder Bedeutung auftretenden Raumarten in einer Übersicht dargestellt werden, und zwar nicht nach ihren geschichtlichen, sondern nach den sachlichen Zusammenhängen.

Auf drei verschiedenen Gebieten werden bestimmte Gefüge als ›Raum‹ bezeichnet, und zwar nicht durch die Zufälligkeit des Sprachgebrauchs, sondern wegen enger Verwandtschaft, die später hervortreten wird. Wir unterscheiden den formalen, den Anschauungsraum und den physischen Raum. Verstehen wir unter einem allgemeinen Ordnungsgefüge ein solches von Beziehungen nicht zwischen bestimmten Gegenständen eines sinnlichen oder nichtsinlichen Gebietes, sondern zwischen durchaus unbestimmten Beziehungsgliedern, über das nur bekannt ist, daß aus der Verknüpfung bestimmter Art auf

die Verknüpfung einer andern Art im gleichen Bereich zu schließen ist, so ist der formale Raum ein allgemeines Ordnungsgefüge besonderer Art. Bei ihm handelt es sich also nicht um die Gebilde, die gewöhnlich als räumlich bezeichnet werden, Dreiecke, Kreise oder dergl., sondern um bedeutungslose Beziehungsstücke, an deren Stelle die verschiedenartigsten Dinge (Zahlen, Farben, Verwandtschaftsgrade, Kreise, Urteile, Menschen usw.) treten können, wofern zwischen ihnen Beziehungen bestehen, die bestimmten formalen Bedingungen genügen. Unter Anschauungsraum dagegen wird das Gefüge der Beziehungen zwischen den im üblichen Sinne ›räumlichen‹ Gebilden verstanden, also den Linien-, Flächen- und Raumstücken, deren bestimmte Eigenheit wir bei Gelegenheit sinnlicher Wahrnehmung oder auch bloßer Vorstellung erfassen. Dabei handelt es sich aber noch nicht um die in der Erfahrungswirklichkeit vorliegenden räumlichen Tatsachen, sondern nur um das ›Wesen‹ jener Gebilde selbst, das an irgendwelchen Artvertretern erkannt werden kann.

Jene Tatsachen wiederum, also z. B. der Erfahrungsbefund, daß diese Kante dieses Körpers zu jener Kante des andern Körpers in dieser bestimmten räumlichen Beziehung steht, bilden das Gefüge des physischen Raumes. Er setzt zu seiner Erkenntnis die des Anschauungsraumes voraus, und dieser wiederum findet in dem formalen Raum die reine Form seines Gefüges vorgebildet und hat ihn daher zur denkmäßigen Voraussetzung.

Nach der Darstellung dieser drei verschiedenen Bedeutungen des Raumes und ihrer Zusammenhänge wird auch zu erkennen sein, worauf sich die Erkenntnis vom Raum gründet, und insbesondere, ob und inwieweit sie von der Erfahrung abhängig ist.

## I. Der formale Raum.

Seit Euklid ist es das Bestreben der Geometrie, eine rein deduktive Wissenschaft zu sein: der Beweis eines jeden Satzes soll sich nur auf die den Grundstock des Lehrgebäudes bildenden Grundsätze und die allgemeinen Gesetze der Logik stützen, nicht aber auf Anschauung, Erfahrung oder stillschweigend als selbstverständlich angenommene Sätze. Euklid hat der Raumlehre dieses Ziel gewiesen, hat auch ein bedeutendes Stück des Weges zurückgelegt, selbst aber das Ziel nicht erreicht. Erst den Forschungen der letzten Jahrzehnte über die Grundlagen der Geometrie ist es gelungen, die Gesamtheit der erforderlichen Grundsätze aufzustellen. Dabei hat sich gezeigt, daß es nicht notwendig ist, für die Grundgebilde (Punkt, Gerade, Ebene) Begriffsbestimmungen zu geben; Euklid hatte solche zwar an den Anfang seines Lehrgebäudes gestellt, sie aber später bei keinem Beweise benutzt. Sondern es werden nur bestimmte Beziehungen zwischen den Grundgebilden (das Liegen eines Punktes auf einer Geraden oder in einer Ebene, die Gleichheit zweier Strecken usw.) durch die Grundsätze festgelegt, z. B.: ›zu irgend zwei Punkten gibt es stets eine und nur eine Gerade, auf der sie liegen‹, ›zu irgend drei Punkten gibt es stets eine und nur eine Ebene, in der sie liegen‹ usw. Aus den Grundsätzen werden dann die Lehrsätze erschlossen, ohne irgendwelche Rücksicht darauf zu nehmen, welche anschauliche Bedeutung jene Gebilde und Beziehungen haben. Es wird demnach gar nicht der ganze Bedeutungsgehalt, den die Grundsätze für denjenigen haben, dem die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, Liegen auf . . . schon bekannt sind, auch logisch wirksam für den auf ihnen zu errichtenden Wissenschaftsbau. Wirksam ist nur ihre logische Form, falls wir hierunter den Bedeutungsanteil verstehen wollen, den sie auch bei der Umwandlung etwa in folgende allgemeinere Gestalt bewahren: von den Dingen dreier Klassen  $P$ ,  $G$  und  $E$  und der Beziehung  $i$  gelten folgende Voraussetzungen: ›zu irgend zwei Dingen der Klasse  $P$  gibt es stets ein und nur ein Ding der Klasse  $G$ ,

zu dem jene beiden in der Beziehung  $i$  stehen«, »zu irgend drei Dingen der Klasse  $P$  gibt es stets ein und nur ein Ding der Klasse  $E$ , zu dem jene beiden in der Beziehung  $i$  stehen«, und entsprechend für die weiteren Grundsätze. Denken wir uns auch alle Lehrsätze in diese allgemeinere Form gebracht, so haben wir an Stelle der eigentlichen Geometrie, nämlich der der Punkte, Geraden und Ebenen, eine »reine Beziehungslehre« oder »Ordnungslehre«, d. h. eine Wissenschaft von unbestimmten Dingen und unter ihnen geltenden ebenso unbestimmten Beziehungen, für die einige wenige Grundsätze vorausgesetzt und auf Grund davon Lehrsätze in unbeschränkter Zahl abgeleitet werden. Als Gegenstand dieser Wissenschaft tritt so anstelle des Raumes, d. h. des durch die geometrischen Grundsätze bestimmten Gefüges der Punkte, Geraden und Ebenen, der dann zur Unterscheidung »Anschauungsraum« genannt werden wird, ein durch jene formalen Grundsätze bestimmtes »Beziehungs- oder Ordnungsgefüge«. Da dieses die formale Bauart jenes Raumgefüges darstellt und durch Einsetzung der räumlichen Grundgebilde anstelle der unbestimmten Beziehungsglieder sich wieder in jenes verwandelt, wird es auch Raum genannt, und zwar »formaler Raum«.

Der Vorzug dieses formalen Gefüges liegt einerseits in seiner logischen Geschlossenheit und Strenge, da es von nichtlogischen (anschauungs- oder erfahrungsmäßigen) Bestandteilen frei ist, andererseits in seiner großen Fruchtbarkeit gerade auch für die eigentlich geometrische Forschung, da die Unbestimmtheit seiner Beziehungsglieder es nicht nur auf Punkte, Geraden und Ebenen, sondern auf die verschiedensten Arten von Grundgebilden anwendbar macht. Dadurch wird die Betrachtung von Gebilden, die von Punkten und Geraden aus sehr umständlich zu entwickeln sind, häufig beträchtlich vereinfacht. Diese Vielfachheit der Übertragung, sowie überhaupt das Verhältnis des formalen Raumes zum Anschauungsraum wird später genauer aufgewiesen werden.

Der Aufbau des formalen Raumes kann aber nicht nur in der angedeuteten Weise durch Aufstellung bestimmter Grundsätze über Klassen und Beziehungen vorgenommen werden, sondern auch auf einem andern Wege: von der formalen Logik, der allgemeinen Klassen- und Beziehungslehre, werden die (Ordnungs-)Reihen und als Sonderfall die stetigen Reihen entwickelt. In den stetigen Reihen höherer Stufe (Reihen von Reihen) ist dann der allgemeinste Fall des formalen Raumes mit mehreren (insbesondere drei) Abmessungen erreicht, aus dem durch bestimmte Besonderungen der (formale) pro-

jektive Raum und die verschiedenen Arten der (formalen) metrischen Räume hervorgehen. Nur dieser Weg ist imstande, zum vollständigen Bau des formalen Raumes zu führen, der alle Unterarten umfaßt. Er werde daher im folgenden in kurzem Überblick angedeutet. Da jedoch der erstgenannte Weg, der unmittelbar zu irgend einer Sonderart des (formalen) Raumes führt, der bisher in der Wissenschaft allein vollständig durchgeführte ist, so wird auch auf ihn später kurz hinzuweisen sein.

Den Aufbau der formalen Logik beginnen wir mit den undefinierten Grundbegriffen »wahr« und »falsch«. Wir nennen alles das, was entweder wahr oder falsch ist, ein Urteil. Eine Zusammenstellung von Zeichen, insbesondere Schriftzeichen, die ein Urteil bezeichnet, heißt (vollständiger) Satz. Nehmen wir aus einer solchen Zusammenstellung einen Bestandteil mit selbständiger Bedeutung unter Bezeichnung der leergemachten Stelle heraus, so bezeichnet ein solcher »unvollständiger Satz« kein Urteil mehr. Er ist aber von besonderer Wichtigkeit für die Logik. Aus ihm können sich unter Umständen mehrere vollständige Sätze ergeben, wenn andre Zeichen an die leergemachte Stelle gesetzt werden; diese Stelle heißt deshalb Einsatzstelle (Argumentstelle), das vom eingesetzten Zeichen Bezeichnete: Einsatz (Argument). Die dadurch gebildeten vollständigen Sätze können dann wahre oder auch falsche Urteile bezeichnen. So zeigt sich, daß der unvollständige Satz, wenn er auch kein Urteil bezeichnet, so doch Urteile gewissermaßen der Möglichkeit nach (potentiell), und zwar in Abhängigkeit vom Einsatz, enthält, also nicht bedeutungslos ist; wir sagen, er bezeichne einen »Begriff«. Von dem Einsatz sagen wir, er falle unter den Begriff oder falle nicht darunter, je nachdem der durch die Einsetzung gebildete Satz ein wahres oder falsches Urteil bezeichnet. Der Kürze halber wollen wir in übertragener Weise auch vom Satz sagen, er sei wahr oder falsch.

1. Beispiel. Aus dem vollständigen Satz » $2 + 3 = 5$ « bilden wir den unvollständigen » $2 + ( ) = 5$ «; dieser bezeichnet den Begriff »was zu 2 addiert 5 gibt«. Unter diesen Begriff fällt nur die Zahl Drei. Denn nur durch Einsetzung von Zeichen dieser Zahl (»3« oder » $2 + 1$ « oder » $\frac{5}{2}$ « usw.) werden wahre Sätze gebildet; für andre Einsätze (»4«, »+«, »Haus«) ergeben sich falsche Sätze (bei genügend genauer Begriffsbestimmung der arithmetischen Zeichen nicht sinnlose).

2. Beispiel. Aus » $2 + 3 = 5$ « können wir auch den unvoll-

ständigen Satz bilden  $\succ 2 + 3 \text{ ( ) } 5 \prec$ , der den Begriff  $\succ$ Beziehung zwischen  $2 + 3$  und  $5 \prec$  bezeichnet. Unter diesen Begriff fallen: Gleichheit, Zusammengehörigkeit zur gleichen (beliebigen) Klasse (z. B. der der positiven ganzen Zahlen). Denn es ergeben sich wahre Sätze durch Einsetzung von  $\succ = \prec$  oder  $\succ$  ist eine positive ganze Zahl, wie auch  $\prec$ . Falsche Sätze entstehen dagegen durch Einsetzung von:  $\neq$ ,  $<$ ,  $5$  usw.

3. Beispiel. Aus  $\succ$ Hamburg ist eine Stadt $\prec$  bilden wir den unvollständigen Satz  $\succ \text{ ( ) } \prec$  ist eine Stadt $\prec$ . Dieser bezeichnet den Begriff  $\succ$ was eine Stadt ist $\prec$ , kurz: den Begriff  $\succ$ Stadt $\prec$ .

Ebenso wie ein unvollständiger Satz mit einer Einsatzstelle einen Begriff, bezeichnet ein solcher mit zwei Einsatzstellen eine Beziehung. Die beiden Stellen müssen von einander unterschieden werden; wir bezeichnen sie deshalb mit  $(_1)$  und  $(_2)$  und sagen dann: der erste Einsatz steht zu dem zweiten in der betr. Beziehung.

1. Beispiel. Aus  $\succ 2 + 3 = 5 \prec$  bilden wir  $\succ 2 + (_1) = (_2) \prec$ . In der hierdurch bezeichneten Beziehung stehen zueinander: 3 und 5 (nicht aber 5 und 3), 4 und 6, usw.

2. Beispiel. Aus  $\succ$ Odysseus ist Vater von Telemach $\prec$  bilden wir  $\succ (_1) \prec$  ist Vater von  $(_2) \prec$ . Dieser unvollständige Satz bezeichnet die Vaterbeziehung.

3. Beispiel. Da die natürliche Sprache meist mehr dem Bedürfnis der Kürze als dem der Zergliederung Rechnung trägt, muß der sprachliche Ausdruck zuweilen umgeformt werden. Um im vorigen Beispiel die Bezeichnung der Vaterschaft in eine Einsatzstelle zu verwandeln, wäre der Satz etwa so auszudrücken:  $\succ$ O. steht in der Verwandtschaftsbeziehung Vater zu T. $\prec$ , woraus dann gebildet werden können: a) der unvollständige Begriffssatz  $\succ$ O. steht in der Verwandtschaftsbeziehung  $(_1)$  zu T. $\prec$ , der den Begriff  $\succ$ Verwandtschaftsbeziehung zwischen O. und T. $\prec$  bezeichnet, b) der unvollständige Beziehungssatz  $\succ$ O. steht in der Verwandtschaftsbeziehung  $(_1)$  zu  $(_2) \prec$ , der die Beziehung zwischen Verwandtschaftsarten und den durch diese mit O. verknüpften Menschen bezeichnet.

4. Beispiel. Alle mathematischen Funktionen (einer reellen, unabhängigen Veränderlichen) sind hiernach als Beziehungen zwischen dem Wert der Veränderlichen und dem zugehörigen Wert (oder mehreren) der Funktion aufzufassen. Die Sinusfunktion z. B. wäre, um beide Einsatzstellen zu zeigen, in der Form auszudrücken:  $\succ (_1) = \sin (_2) \prec$ .

Es sind jetzt einige unterscheidende Eigenschaften von Beziehungen zu erläutern. Für diese führen wir, um allgemeiner von ihnen

sprechen zu können, die Bezeichnung ein:  $B_{(1,2)}$ , oder auch kurz  $B$ . Bezeichnen  $a, b, c, d$  bestimmte Gegenstände, so sind also  $B(a, b)$ ,  $B(c, d)$  vollständige Sätze. Sprechen wir von mehreren Beziehungen, so unterscheiden wir sie durch Kennziffern:  $B_1(a, b)$  und  $B_2(a, b)$  sind demnach zwei verschiedene vollständige Sätze.

Unter der Umkehrung einer Beziehung  $B_{1(1,2)}$  verstehen wir diejenige Beziehung  $B_{2(1,2)}$ , für die die Einsatzstellen im Vergleich zu jener vertauscht sind; also immer dann, wenn  $B_1(a, b)$  wahr ist, ist auch  $B_2(b, a)$  wahr, was auch immer  $a$  und  $b$  sein mögen. Beispiel: Wenn  $a$  Nachkomme von  $b$ , so ist immer  $b$  Vorfahre von  $a$ ; also ist die Beziehung Vorfahre Umkehrung der Beziehung Nachkomme.

Eine Beziehung heißt gleichseitig (symmetrisch), wenn sie mit ihrer Umkehrung identisch ist, also aus  $B(a, b)$  immer  $B(b, a)$  folgt und umgekehrt. Beispiel: Gleichaltrigkeit.

Eine Beziehung heißt übergreifend (transitiv), wenn aus  $B(a, b)$  und  $B(b, c)$  immer folgt  $B(a, c)$ . Beispiel: In der Arithmetik folgt aus  $a > b$  und  $b > c$  immer  $a > c$ ; ebenso aus  $a = b$  und  $b = c$  immer  $a = c$ ; die Beziehungen  $\succ > \prec$  und  $\succ = \prec$  sind also übergreifend.

Eine Beziehung heißt eindeutig, wenn es zu jedem ersten Einsatz nur einen zweiten gibt; es folgt dann also aus  $B(a, b)$  und  $B(a, c)$  immer  $b = c$ , was  $a$  auch immer sei. Beispiel:  $\succ$ Vater des  $(_1)$  ist  $(_2) \prec$  (im sprachlichen Ausdruck: die  $\succ$ Beziehung zum Vater $\prec$ ). Im andern Falle heißt die Beziehung mehrdeutig. Beispiel:  $\succ (_1) \prec$  ist Vater von  $(_2) \prec$  (im sprachlichen Ausdruck: die  $\succ$ Beziehung des Vaters $\prec$ ).

Die Umkehrung einer Beziehung kann mehrdeutig sein, während sie selbst eindeutig ist: mehr-eindeutige Beziehung (z. B. Bez. zum Vater). Im umgekehrten Falle heißt sie ein-mehrdeutig (z. B. Vaterbeziehung).

Eine Beziehung heißt ein-eindeutig, wenn sowohl sie selbst als ihre Umkehrung eindeutig ist. Beispiel: Die Beziehung  $\succ (_1) + 1 = (_2) \prec$  ist ein-eindeutig.

Wir gehen nun zu einer Verknüpfung zwischen Begriff und Beziehung über. Besteht zwischen den Gegenständen eines Begriffes einerseits und denen eines andern andererseits eine ein-eindeutige Beziehung, die  $\succ$ Zuordnungsbeziehung $\prec$ , derart daß jeder Gegenstand des ersten Begriffes zu einem des zweiten in dieser Beziehung steht, und zu jedem des zweiten einer des ersten, so sagen wir: die beiden Begriffe sind gleichmächtig (äquivalent). Die Gleichmächtigkeit ist danach eine gleichseitige übergreifende Beziehung zwischen zwei Be-

griffen. Auf ihr baut sich die Lehre von den Klassen oder Begriffsumfängen auf und ein mit dieser im Grunde übereinstimmender Teil der mathematischen Mengenlehre, die Lehre von den Mächtigkeiten; nur hat diese eine Entwicklung aus mathematischen Gesichtspunkten heraus unter vorwiegender Behandlung der unendlichen Mengen genommen und daher auch andre Bezeichnungsweise. Aus dieser gleichen begrifflichen Quelle geht die Lehre von den Anzahlen (Arithmetik der Kardinalzahlen) hervor, indem unter Anzahl der Begriff von Begriffen, die gleichmächtig sind, verstanden wird.

Besteht zwischen den Gegenständen eines Begriffes (z. B. den Schülern einer Klasse) eine ungleichseitige, übergreifende Beziehung (z. B. ›älter als‹), derart daß irgend zwei dieser Gegenstände entweder in dieser Beziehung oder in ihrer Umkehrung zueinander stehen, so sagen wir: die Gegenstände bilden eine Reihe auf Grund jener ›reihenbildenden Beziehung‹.

Hierzu komme ein anderer, dem ersten gleichmächtiger Begriff (z. B. die Mantelhaken der Schulklasse; ein-eindeutige Zuordnungsbeziehung: ›der Haken (,) gehört dem Schüler (,)‹). Auch die Gegenstände des zweiten mögen eine Reihe bilden (z. B. reihenbildende Beziehung: weiter rechts). Sind dann die beiden reihenbildenden und die zuordnende Beziehung so beschaffen, daß, wenn in der ersten Reihe irgend zwei Gegenstände in der dort reihenbildenden Beziehung zu einander stehen, auch immer die ihnen in der zweiten Reihe zugeordneten Gegenstände in der hier reihenbildenden Beziehung zu einander stehen, so heißen die beiden Reihen ähnlich. (Beispiel: Wenn für irgend zwei Schüler immer gilt, daß der Haken des älteren weiter rechts hängt, so heißt die Reihe der Haken ähnlich der Reihe der Schüler). Die Ähnlichkeit ist danach eine gleichseitige, übergreifende (auf Grund einer Zuordnungsbeziehung bestehende) Beziehung zwischen zwei Reihen. Auch die reihenbildenden Beziehungen nennt man in diesem Falle ähnlich. (Im Beispiel: die Beziehung ›weiter rechts in der Hakenreihe‹ steht zu der Beziehung ›älter in dieser Schülerklasse‹ in der Beziehung der Ähnlichkeit).

Den Begriff der zu einer bestimmten Beziehung ähnlichen Beziehungen nennen wir ihre Ordnungszahl (Ordinalzahl); (den Begriff, nicht die darunter fallenden Beziehungen!). Hierauf baut sich die Lehre von den Ordnungstypen als zweiter Hauptteil der Mengenlehre auf. Die Bestimmungen der wichtigsten Ordnungstypen seien hier kurz angegeben, da sie die weiteren Schritte zu unserm Ziel, dem Aufbau des formalen Raumes, bilden.

Alle diejenigen Reihen (in anderer Ausdrucksweise: ihre reihenbildenden Beziehungen) sind ähnlich zu einander, die folgende Bedingungen erfüllen: im Sinne der reihenbildenden Beziehung gibt es einen ersten Gegenstand (›Anfangsglied‹); zu jedem Gegenstand gibt es einen, der ihm als erster folgt, und zu jedem, außer jenem Anfangsglied, einen, der ihm als letzter vorhergeht, also im Ganzen keinen letzten Gegenstand. Solche Reihen heißen Progressionen (in der Mengenlehre: Ordnungstypus  $\omega$ ). Um alles das, was von diesen einander ähnlichen Reihen gilt, kürzer ausdrücken zu können, sagen wir es von einem formalen Vertreter aus, den wir uns für sie zu diesem Zwecke schaffen. Diesen formalen Vertreter der Progressionen nennen wir ›Reihe der natürlichen (Ordnungs-) Zahlen‹. Genau genommen ist dieser Vertreter der Progressionen nichts anderes als ihr Begriff (in unserm Sinne dieses Wortes).

Ferner sind alle Reihen, die folgender Bedingung genügen, einander ähnlich: die Reihe ist gleichmächtig mit einer Progression; im Sinne der reihenbildenden Beziehung gibt es kein erstes und kein letztes Glied; für irgend zwei Gegenstände der Reihe gibt es immer (mindestens) ein drittes, das zu dem zweiten und zu dem das erste in der reihenbildenden Beziehung steht. (Ordnungstypus  $\eta$ ). Den formalen Vertreter dieser Reihen nennen wir ›Reihe der Bruchzahlen‹ (Rationalzahlen).

In ähnlicher Weise, jedoch umständlicher, und daher hier nicht in Kürze auseinanderzusetzen, können die Bedingungen für Reihen angegeben werden, deren formalen Vertreter wir ›Reihe der reellen Zahlen‹ nennen (Ordnungstypus  $\lambda$ ). Diese Reihen sind stetig. Damit ist in rein formalem Fortgange, ohne Bezugnahme auf Anschauung, das Kontinuum aufgebaut.

Die Gegenstände eines Begriffes können auch, anstatt wie bisher in einer Reihe, in Reihen von Reihen (›Reihen zweiter Stufe‹) geordnet werden. Z. B. können die Schüler einer Schule nach Klassen, die von der ersten zur letzten eine Reihe bilden, und innerhalb jeder Klasse nach der Größe geordnet werden; oder die möglichen Töne eines Klaviers nach der Höhe, und alle gleichhohen Töne nach der Stärke. Diese Reihen zweiter Stufe bilden den Gegenstand der Lehre von den Zahlpaaren (Arithmetik der komplexen Zahlen mit zwei Einheiten), die sich danach aus dem Bisherigen auch wiederum rein formal entwickeln läßt.

In entsprechender Weise werden die Reihen dritter und beliebiger weiterer Stufen, allgemein  $n$ 'ter Stufe, aufgebaut und in der Lehre

von den Zahlreihen oder höheren Zahlmengen behandelt. Eine solche stetige Reihe 3. bzw.  $n$ . Stufe nennen wir einen formalen Raum von 3 bzw.  $n$  Abmessungen, obwohl von räumlichen Gebilden bisher noch nicht die Rede gewesen ist. Später wird deutlich werden, daß zwischen diesem »Raum« und dem, der sonst so genannt wird, eine enge Verwandtschaft besteht. Aus diesem Grunde werden nun auch mit diesem formalen Raum von  $n$  bzw. 3 Abmessungen, den wir mit  $R_{nt}$  bzw.  $R_{zt}$  bezeichnen wollen, Besonderungen (Spezialisierungen) vorgenommen, die ihren eigentlichen Sinn erst durch die spätere Anwendung auf die eigentlichen räumlichen Gebilde erhalten. Denn hier haben wir es ja immer noch mit bloß formalen Beziehungen zu tun, ohne daß vorausgesetzt wird, was für Gegenstände in diesen Beziehungen zu einander stehen. Man nennt deshalb die verschiedenen  $R$  auch Gefüge von Ordnungsbeziehungen (Systeme von Ordinalbeziehungen), kurz Ordnungsgefüge.

Durch engere Bedingungen für die reihenbildenden Beziehungen in diesen Gefügen entsteht aus dem  $R_{nt}$ , der dann zur Unterscheidung topologischer Raum genannt wird, der projektive Raum  $R_{np}$  und weiterhin der metrische Raum  $R_{nm}$ , die sich also zu jenem wie Art und Unterart zur Gattung verhalten (nicht wie Einzelding zur Art). In entsprechender Weise geht aus dem topologischen Raum mit drei Abmessungen  $R_{zt}$  der projektive  $R_{zp}$  und der metrische  $R_{zm}$  hervor, sowie noch weitere Unterarten. (Vgl. nebenstehende Übersicht).

Es hat sich nun gezeigt, daß die so entstehenden Ordnungsgefüge (z. B. der  $R_{zp}$ ), wenn sie für sich allein (d. h. ohne Rücksicht auf den  $R_{zt}$  oder  $R_{nt}$ ) untersucht werden sollen, einfacher aufzubauen sind, wenn man sie unmittelbar darstellt als Gefüge gewisser einfacher Beziehungen, deren formale Eigenschaften angegeben werden; anstatt den Umweg über die stetigen Reihen erster, dann dritter Stufe und die einschränkenden Bestimmungen zu machen. Dies werde hier nicht für alle genannten Raumarten, sondern nur für den  $R_{zp}$  gezeigt, da dabei das Gesagte zur Genüge deutlich wird.

Das durch folgende Bestimmungen (bei deren Angabe hier mehr auf Kürze und Verständlichkeit, als auf Genauigkeit und Vollständigkeit gesehen ist), umgrenzte Gefüge ist gleicher Art, wie das aus  $R_{zt}$  durch Besonderung zu entwickelnde Gefüge  $R_{zp}$ .

Ein Begriff  $P$ , unter den die Gegenstände  $P_1, P_2 \dots$  fallen, erfülle folgende Bedingungen: es gibt einen Begriff  $G$ , unter den nicht Gegenstände, sondern Begriffe  $g_1, g_2 \dots$  fallen, derart daß unter jeden  $g$ -Begriff nur  $P$ -Gegenstände fallen, und zwar mindestens drei,

## Übersicht der Raumarten.

(Die Einteilung ist die gleiche für den formalen Raum  $R$ , den Anschauungsraum  $R'$ , den physischen Raum  $R''$ .)

Der Raum mit 3 Abmessungen:  
(Kontinuum 3. Stufe)

topologischer Raum  $R_{zt}$

projektiver Raum  $R_{zp}$

metrischer Raum  $R_{zm}$   
(gekennzeichnet durch das Krümmungsmaß  $k$ )

seine Unterarten:

isotrope Räume:

(in jedem Punkt 3 gleiche Werte für  $k$ )  
nicht homogene Räume:  $R_i$

Der Raum mit beliebig vielen  
Abmessungen:

(Kontinuum  $n$ . Stufe)  
topologischer Raum  $R_{nt}$

projektiver Raum  $R_{np}$

metrischer Raum  $R_{nm}$

nicht isotrope Räume:

$R_u$   
(allgemeinster Fall: alle Werte von  $k$  ungleich)

Unterarten:

$R_{u \leq}$ ,  $R_{u \geq}$ ,  $R_{u \leq \geq}$   
( $k \leq 0$ ) ( $k \geq 0$ ) ( $k \leq \geq 0$ )  
(Einstein)

homogene Räume:

(in allen Punkten dieselben 3 Werte für  $k$ )

$R_{ih}$

(Raum konstanter Krümmung; Kongruenzraum)

Unterarten:

$R_{ih <}$ ( $k < 0$ )	$R_{ih =}$ ( $k = 0$ )	$R_{ih >}$ ( $k > 0$ )
(Lobatschewskij)	(Euklid)	(Riemann)
hyperbol. Raum	parabol. Raum	ellipt. Raum (Abart: sphär. Raum)

[Winkelsumme  
im Dreieck:

< 180°, = 180°, > 180°]



unter keinen aber alle; für irgend zwei  $P$ -Gegenstände gibt es immer einen und nur einen  $g$ -Begriff, unter den beide fallen (ihr ›gemeinsamer‹  $g$ -Begriff); es gilt allgemein, welche  $P$ -Gegenstände auch immer gewählt werden mögen: fallen  $P_1, P_2, P_2'$  unter den  $g$ -Begriff  $g_1, P_2, P_3, P_1'$  unter den andern  $g_2$ , so gibt es erstens einen Gegenstand  $P_4$ , der sowohl unter den gemeinsamen  $g$ -Begriff von  $P_1$  und  $P_1'$ , als auch unter den von  $P_2$  und  $P_2'$  fällt; und zweitens einen  $g$ -Begriff  $g_3$ , unter den zwar  $P_1$ , aber kein Gegenstand von  $g_2$  fällt.

Das hierdurch bestimmte Gefüge ist der formale projektive Raum  $R_{sp}$ . Als Beispiel der für ihn geltenden Lehrsätze, die aus den genannten Bestimmungen abgeleitet werden, sei der folgende genannt, in dessen unanschaulicher Gestalt der für die projektive Geometrie so wichtige Satz des Desargues kaum wiederzuerkennen ist; erst in den untenstehenden Anwendungsbeispielen werden die Bestimmungen des Gefüges und der Lehrsatz anschaulich, und dann auch durch Figuren darstellbar.

**Lehrsatz.** Sind in dem genannten Gefüge neun Gegenstände  $P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3', P_{1,2}, P_{2,3}, P_{3,1}$  und sieben  $g$ -Begriffe  $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,3}, g_{2,1}, g_{3,1}, g_{3,2}, g_4$  gegeben von der Art, daß

$P_1, P_2$  und  $P_{1,2}$  unter  $g_{1,2}$ ,

$P_1', P_2', P_{1,2}$  „  $g_{1,3}$ ,

$P_2, P_3, P_{2,3}$  „  $g_{2,3}$ ,

$P_2', P_3', P_{2,3}$  „  $g_{2,1}$ ,

$P_3, P_1, P_{3,1}$  „  $g_{3,1}$ ,

$P_3', P_1', P_{3,1}$  „  $g_{3,2}$ ,

$P_{1,2}, P_{2,3}, P_{3,1}$  unter  $g_4$  fallen, aber weder  $P_1, P_2, P_3$  noch  $P_1', P_2', P_3'$  einen gemeinsamen  $g$ -Begriff haben, so gibt es in dem Gefüge einen Gegenstand ( $P_{1,2,3}$ ), der sowohl unter den gemeinsamen  $g$ -Begriff von  $P_1$  und  $P_1'$ , als auch unter den von  $P_2$  und  $P_2'$ , als auch unter den von  $P_3$  und  $P_3'$  fällt.

Daß ein solches formales Gefüge nicht auf Dinge bestimmter Art beschränkt ist, werde jetzt dadurch deutlich gemacht, daß gewisse Mengen verschiedenartigster Gegenstände aufgezeigt werden, von denen bei Voraussetzung der genannten Bestimmungen des  $R_{sp}$  auch alle Lehrsätze der projektiven Geometrie gelten, so z. B. der genannte Satz des Desargues. Die Beispiele sind nicht (wie der  $R_{sm}$ ) Unterarten der Raumart  $R_{sp}$ , sondern Einzelfälle; ein jedes stellt einen bestimmten projektiven dreistufigen Raum (im formalen Sinne) dar.

**1. Beispiel.** Ein Gefüge  $F_{sp}$  von Farben erfülle folgende Bedingungen: die Farben kommen in gewissen Zusammenstellungen, Farbstreifen genannt, vor; jeder Streifen trägt mindestens drei verschiedene Farben, kein Streifen aber alle auf den übrigen Streifen vorkommenden. Wählen wir zwei beliebige der Farben, so gibt es stets einen und nur einen Streifen, der beide trägt; er heißt ihr gemeinsamer Träger. Ferner soll für beliebige Wahl gelten: fassen wir irgend drei Farben  $f_1, f_2, f_3$  eines Streifens  $s_1$ , und  $f_2, f_3$  (mit jenem  $f_2$  identisch),  $f_1'$  eines andern Streifens  $s_2$  ins Auge, so hat erstens der gemeinsame Träger von  $f_1$  und  $f_1'$  mit dem gemeinsamen Träger von  $f_2$  und  $f_2'$  eine Farbe  $f_4$  gemeinsam, und zweitens gibt es dann einen Streifen  $s_3$ , der die Farbe  $f_1$ , aber keine auf dem Streifen  $s_2$  vorkommende trägt.

Für dieses Farbgefüge gelten nun alle Sätze über den  $R_{sp}$ , also auch jener Lehrsatz:

Sind neun Farben  $f_1, f_2, f_3, f_1', f_2', f_3', f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,1}$  so gegeben, daß folgende Farbdreier auf je einem Streifen vorkommen:  $(f_1, f_2, f_{1,2})$ ,  $(f_2, f_3, f_{2,3})$ ,  $(f_3, f_1, f_{3,1})$ ,  $(f_1', f_2', f_{1,2})$ ,  $(f_2', f_3', f_{2,3})$ ,  $(f_3', f_1', f_{3,1})$ ,  $(f_{1,2}, f_{2,3}, f_{3,1})$ , dagegen weder für  $f_1, f_2, f_3$  ein gemeinsamer Träger vorhanden ist, noch für  $f_1', f_2', f_3'$ , so gibt es eine Farbe  $(f_{1,2,3})$ , die sich sowohl mit  $f_1$  und  $f_1'$  auf einem gemeinsamen Streifen findet, als auch mit  $f_2$  und  $f_2'$ , als auch mit  $f_3$  und  $f_3'$ .

**2. Beispiel.** Um ganz verschiedenartige Gegenstände zu nehmen, werde als nächstes Beispiel ein Gefüge  $U_{sp}$  von Urteilen gewählt, und zwar von Urteilen, für die nur bestimmte formale Beziehungen vorausgesetzt werden, deren Gegenstände jedoch unbestimmt sind. Dieses formale, projektive, dreistufige Urteilsgefüge  $U_{sp}$  ist nicht zu verwechseln mit der formalen projektiven Geometrie, die ja auch ein formales Urteilsgefüge ist, oder einem Gefüge, das aus der projektiven Geometrie durch irgend welche Umbildung (z. B. Besonderung oder Verallgemeinerung) gebildet ist.  $U_{sp}$  geht nicht aus der projektiven Geometrie, sondern aus ihrem Gegenstande  $R_{sp}$  durch Einzelfallbildung hervor:  $R_{sp}$  ist ein Gefüge nicht von Urteilen, sondern von unbestimmten Dingen  $P$  (Gliedern, ›Termen‹); für diese  $P$  werden nun Urteile eingesetzt (substituiert) und dadurch  $U_{sp}$  gebildet. Hier besteht also nicht nur die Raumlehre, sondern der ›Raum‹ selbst aus Urteilen! Von dem, was wiederum Gegenstand dieser Urteile sei oder sein könnte, wird überhaupt nicht die Rede sein.

Von zwei Urteilen (oder zwei Urteilsgruppen) sagt man, sie seien gleichwertig (äquivalent), wenn das eine unter denselben Bedingungen

gültig ist wie das andre, so daß also der Schluß von jedem auf das andre erlaubt ist. Z. B. sind die Urteile ›dieses Dreieck ist gleichseitig‹ und ›dieses Dreieck ist gleichwinklig‹ gleichwertig; jedes läßt sich aus dem andern schließen; sie sind entweder beide wahr oder beide falsch. Ebenso ist die Urteilsgruppe der Grundsätze einer bestimmten (z. B. der euklidischen) Geometrie der Gruppe der Lehrsätze gleichwertig; wenn die eine gültig ist, so auch die andre; und jede folgt aus der andern.

Wir wollen nun (nur für dieses Beispiel) eine Gruppe von drei oder mehr Urteilen dann zusammengehörig nennen, wenn irgend zwei ihrer Urteile stets der ganzen Gruppe gleichwertig sind. (So sind z. B. alle diejenigen von einander unabhängigen, linearen Gleichungen in  $x$  und  $y$ , die für  $x = 3$  und  $y = 4$  befriedigt sind, zusammengehörige Urteile; denn wenn irgend zwei von ihnen als wahr angenommen werden, so folgt ja daraus  $x = 3$  und  $y = 4$ , also sind dann alle übrigen auch wahr). Ferner heiße (nur hier) ein Urteil ›mit zwei oder mehr Urteilspaaren  $(U_1, U_2; U'_1, U'_2)$  verträglich‹, wenn es mit jedem einzelnen Paar zusammengehörig ist.

Es sei nun  $U_{sp}$  eine nicht zusammengehörige Menge von Urteilen  $(U_1, U_2, \dots)$ , unter denen zusammengehörige Gruppen bestehen. Für irgend zwei Urteile sei immer noch ein mit ihnen zusammengehöriges in der Menge vorhanden. Ferner soll für beliebige Wahl gelten: sind  $U_1, U_2, U'_2$  zusammengehörig, ebenso  $U_2, U_3, U'_1$  unter sich, aber nicht mit jenen, so gibt es erstens ein Urteil  $U_4$ , das mit den Urteilspaaren  $(U_1, U'_1; U_2, U'_2)$  verträglich ist, und zweitens eine zusammengehörige Urteilsgruppe, zu der wohl  $U_4$ , aber keins der Urteile gehört, die mit  $U_2$  und  $U'_2$  zusammengehörig sind.

Hier lautet nun der Lehrsatz des Desargues: Sind sechs Urteile  $U_1, U_2, U_3, U'_1, U'_2, U'_3$  von  $U_{sp}$  so beschaffen, daß die drei Urteile, die bezw. mit  $(U_1, U_2; U'_1, U'_2)$ , mit  $(U_2, U_3; U'_2, U'_3)$  und mit  $(U_3, U_1; U'_3, U'_1)$  verträglich sind, zusammengehörig sind, so gibt es ein Urteil, das mit den drei Paaren  $(U_1, U'_1; U_2, U'_2; U_3, U'_3)$  verträglich ist.

3. Beispiel. Nehmen wir als weiteres Beispiel ein Gefüge von Punkten und Geraden des Raumes im eigentlichen, anschaulichen Sinne dieses Wortes, so ist das für uns besonders bedeutungsvoll, da es die Beziehung zwischen dem formalen Raum und dem weiterhin zu besprechenden Anschauungsraum erkennen läßt.

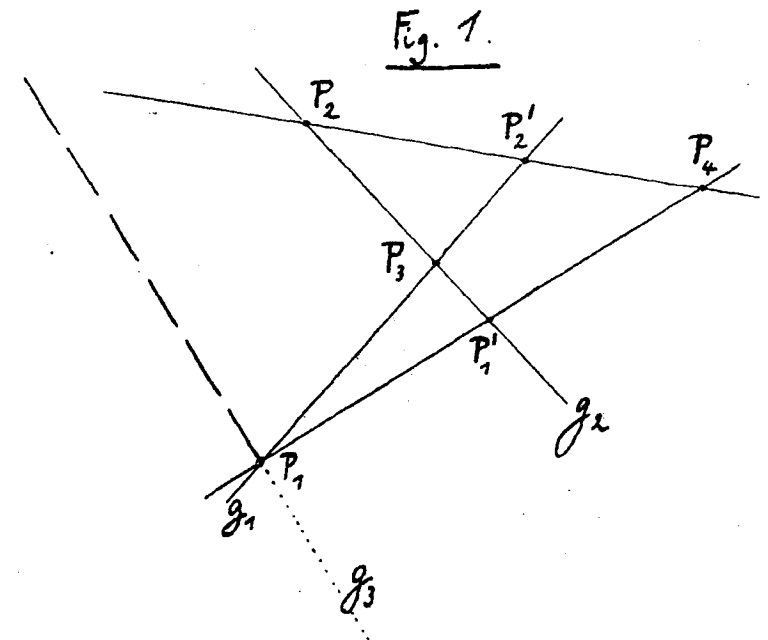
Von den Punkten und Geraden des Raumes seien folgende Grundsätze vorausgesetzt: Ist eine beliebige Gerade gegeben, so gibt es

auf ihr mindestens drei Punkte, und außerhalb mindestens einen Punkt. Durch zwei Punkte geht immer eine und nur eine Gerade. Es gilt bei beliebiger Wahl: liegen  $P_1, P_2, P'_1$  auf einer Geraden,  $P_2, P_3, P'_2$  auf einer andern, so gibt es erstens einen Punkt  $P_4$ , der sowohl auf der durch  $P_1$  und  $P'_1$  gehenden Geraden liegt, wie auch auf der durch  $P_2$  und  $P'_2$  gehenden; zweitens eine Gerade, die durch  $P_1$  geht und mit der durch  $P_2$  und  $P'_2$  gehenden Geraden keinen Punkt gemeinsam hat.

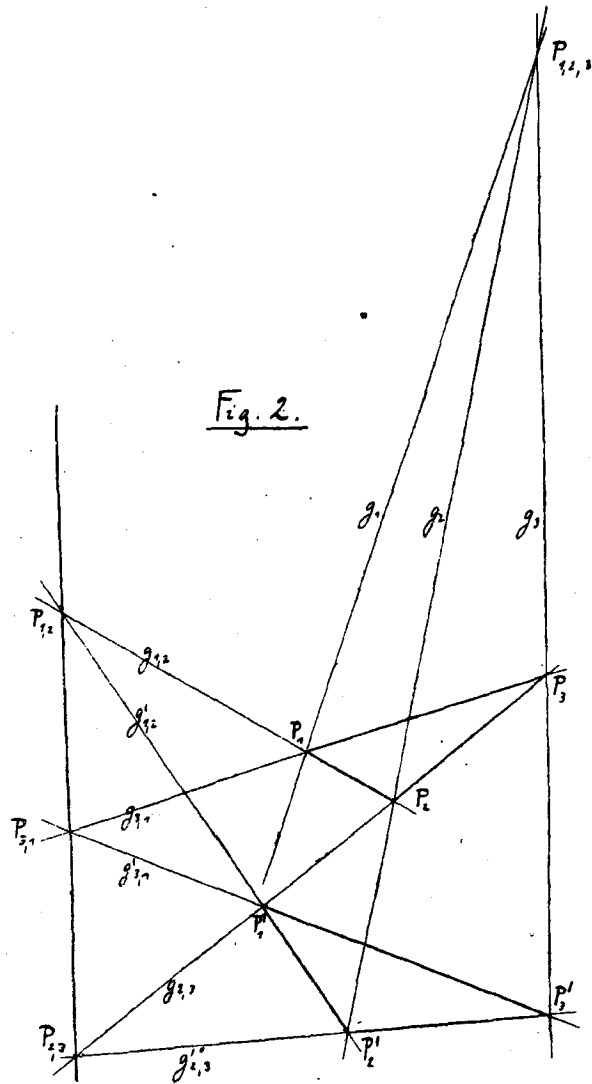
Bei diesem Beispiel können wir uns endlich die Voraussetzungen anschaulich machen durch eine Figur (1), die für die andern Beispiele und den  $R_{sp}$  selbst eine Versinnbildlichung bedeuten kann; ebenso den folgenden Lehrsatz durch Figur 2.

Lehrsatz des Desargues: Liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechender Seiten der beiden Dreiecke  $P_1, P_2, P_3$  und  $P'_1, P'_2, P'_3$  (die nicht in derselben Ebene zu liegen brauchen) auf einer Geraden, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Ecken in einem Punkte.

4. Beispiel. Um die Fruchtbarkeit des formalen Raumes in seiner vielfachen Anwendbarkeit auf den Anschauungsraum deutlich



werden zu lassen, mögen an Stelle von Punkten und Geraden die Kreise  $K$  und Kreisbüschel  $B$  einer Ebene als Glieder des Gefüges genommen werden.



Von ihnen gelten nämlich die den früheren genau entsprechenden Voraussetzungen: ist ein beliebiges Büschel gegeben, so gibt es in ihm mindestens drei Kreise und außerhalb mindestens einen Kreis. Zwei Kreise haben immer ein und nur ein gemeinsames Büschel. Es gilt bei beliebiger Wahl: gehören die Kreise  $K_1, K_2, K'_1$  zu einem Büschel,  $K_2, K_3, K'_1$  zu einem andern, so gibt es erstens einen Kreis  $K_4$ , der sowohl zu dem die Kreise  $K_1$  und  $K'_1$  enthaltenden Büschel gehört, als auch zu dem  $K_2$  und  $K'_1$  enthaltenden; zweitens ein Büschel, zu dem  $K_1$  gehört, aber keiner der Kreise des  $K_2$  und  $K'_1$  enthaltenden Büschels.

Für diese zusammengesetzten Gebilde, Kreise und Kreisbüschel, die an sich eine umständliche Behandlung erfordern würden, können jetzt ohne besonderen Beweis alle für den formalen Raum geltenden Lehrsätze einfach übertragen werden. So lautet hier der Satz des Desargues:

Liegen in einer Ebene sechs Kreise  $K_1, K_2, K_3; K'_1, K'_2, K'_3$ , von denen weder die drei ersten, noch die drei letzten ein gemeinsames Büschel haben; haben ferner die durch  $K_1$  und  $K_2, K'_1$  und  $K'_2$  bestimmten Büschel einen Kreis  $K_{1,2}$  gemeinsam, ebenso die durch  $K_2$  und  $K_3, K'_2$  und  $K'_3$  bestimmten einen Kreis  $K_{2,3}$ , und die durch  $K_3$  und  $K_1, K'_3$  und  $K'_1$  bestimmten Büschel einen Kreis  $K_{3,1}$  gemeinsam, und gehören  $K_{1,2}, K_{2,3}$  und  $K_{3,1}$  zu einem Büschel, so haben die drei durch  $K_1$  und  $K'_1, K_2$  und  $K'_2, K_3$  und  $K'_3$  bestimmten Büschel einen Kreis  $K_{1,2,3}$  gemeinsam.

Die beiden letzten Beispiele zeigen zwei von den unendlich vielen Möglichkeiten, den Anschauungsraum als Einzelfall der durch den formalen Raum bestimmten Gattung, und zwar in diesem Falle den projektiven Anschauungsraum  $R'_{3p}$  als Einzelfall der Gattung  $R_{3p}$  aufzufassen.

## II. Der Anschauungsraum.

Der Anschauungsraum ist ein Ordnungsgefüge, von dem wir wohl die formale Art begrifflich umgrenzen können, aber wie bei allem Anschauungsmäßigen nicht sein besonderes Sosein. Hier läßt sich nur auf Erlebnisinhalte hinweisen, nämlich auf die anschaulich-räumlichen Gebilde und Beziehungen: Punkte, Linienstücke, Flächenstücke, Raumstücke; das Liegen eines Punktes auf einer Linie, in einem Raumstück, das Sich-Schneiden zweier Linien usw. Die psychologische Frage nach der Entstehung solcher Vorstellungen wird hier nicht gestellt, wohl aber die nach der logischen Begründung der Erkenntnisse über den Anschauungsraum, genauer: der Grundsätze, da die weiteren Sätze aus diesen formal-begrifflich abgeleitet werden. Erfahrung gibt nicht den Rechtsgrund für sie ab; die Grundsätze sind erfahrungsunabhängig, genauer (Driesch): unabhängig vom ›Quantum der Erfahrung‹, d. h. ihre Erkenntnis wird nicht, wie bei Erfahrungssätzen, durch die mehrfach wiederholte Erfahrung immer gesicherter. Denn es handelt sich hier, wie Husserl gezeigt hat, gar nicht um Tatsachen im Sinne der Erfahrungswirklichkeit, sondern um das Wesen (›Eidos‹) gewisser Gegebenheiten, das in seinem besondern Sosein schon durch einmaliges Gegebensein erfaßt werden kann. So wie ich bei nur einmaliger Wahrnehmung, ja auch bloßer Vorstellung von drei bestimmten Farbtönen Tiefgrün, Blau und Rot feststellen kann, daß der erste seiner besonderen Art nach dem zweiten verwandter ist als dem dritten, so finde ich bei Vorstellung von Raumgebilden, daß durch zwei Punkte mehrere Linien gehen, daß auf jeder noch weitere Punkte liegen; daß ein einfaches Linienstück, aber nicht ein Flächenstück durch einen darauf liegenden Punkt in zwei Stücke zerteilt wird, usw. Weil wir hierbei nicht auf die einzelhafte Tatsache eingestellt sind, es uns z. B. nicht um den jetzt hier gesehenen Farbton geht, sondern nur um seine zeitlose Art, sein ›Wesen‹, kann es von Wichtigkeit sein, diese Erfassungsweise von der Anschauung im engeren Sinne, die auf die Tatsache selbst geht, durch die Benennung

›Wesenserschauung‹ (Husserl) zu unterscheiden, wo Verwechslung möglich erscheint. Im Allgemeinen mag aber der Ausdruck Anschauung auch die Wesenserschauung mit umfassen, da er in diesem weiteren Sinne auch schon von Kant her gebräuchlich ist.

Es ist nun zu untersuchen, welche Grundsätze über Räumliches unter Berufung auf die Anschauung aufstellbar sind. Nur die Grundsätze brauchen aus der Anschauung entnommen zu werden. Die daraus abgeleiteten Sätze können wir zwar auch noch, wenigstens einige Schritte weit, der Anschauung entnehmen. Um aber mit Rücksicht auf den Grundsatz der wissenschaftlichen Sparsamkeit das Lehrgebäude auf nur so viele Voraussetzungen zu stützen, wie unbedingt erforderlich sind, entnehmen wir der Anschauung möglichst wenige Sätze, aber so viele, daß das räumliche Gefüge eindeutig bestimmt ist, d. h. einem bestimmten formalen Ordnungsgefüge eingeordnet werden kann. Die Verwertung von Anschauungsaussagen über nicht-einfache Gebilde ist auch aus dem Grunde zu vermeiden, weil die Aussagen mit steigender Zusammengesetztheit der Gebilde sehr rasch unsicherer und inhaltlich unbestimmter werden. Wollte man z. B. den Satz des Pythagoras nicht aus einfachen Grundsätzen erschließen, sondern unmittelbar der Anschauung entnehmen, so würde man wohl nur eine Ungleichung über die Seiten und eine abschätzungsweise Gleichung über die Quadrate aussprechen können.

Die Anschauung bezieht sich immer nur auf ein beschränktes Raumgebiet. Daher lassen sich ihr auch nur Erkenntnisse über räumliche Gebilde von beschränkter Größe entnehmen. Dagegen haben wir in bezug auf das Gesamtgefüge, das wir aus diesen Grundgebilden aufbauen, freie Hand. Wenn z. B. die Art eines Gebildes es gestattet, ein zweites der gleichen Art in bestimmter Weise daran zu fügen, so können wir fordern, das dieses Anfügen ohne Ende weiter möglich sein soll. Auf diese Weise können wir aus der geraden Strecke den Begriff der endlosen Geraden aufbauen; und in einem gewissen, übertragenen Sinne auch die Anschauung, nämlich als ein auf das Wissen der Regel der Verknüpfung gegründetes Bewußtsein der Möglichkeit der Erfassung jeder Strecke der Geraden in der Anschauung. Aber dem so gewonnenen Begriff entspricht dann nicht nur die unendliche Gerade, sondern auch die endliche, aber endlose, geschlossene Gerade des elliptischen Raumes. Zwischen beiden entscheidet weder die Anschauung, noch jene Forderung. Anschauung und Forderung zusammen helfen uns so zwar über das Endliche hinaus, lassen aber trotzdem

bestimmte Fragen über das Unendliche offen. Diese Verhältnisse sollen näher untersucht werden.

Wir stellen zuerst die der Anschauung entnehmbaren Grundsätze zusammen, erörtern dann die Forderungen, die hieran zu knüpfen sind, um ein räumliches Gesamtgefüge zu erhalten, und haben dann zu untersuchen, welche Arten solcher Gefüge sich daraus ergeben.

Wegen der erwähnten Unmöglichkeit, die Bedeutung der Grundbegriffe, sowohl der Grundgebilde (Punkte, Geraden, Winkel, usw.), als auch ihrer Beziehungen (Liegen auf, Schneiden, Gleichheit) hier im Gebiet der Anschauung begrifflich zu umgrenzen, dürften sie nur durch Hinweis auf einige anschauungsmäßige Merkmale verständlich gemacht werden. Dies ist der Sinn der Begriffsbestimmungen bei Euklid. Hier scheinen sie nicht erforderlich.

Dem bekannten Hilbertschen Aufbau der Raumlehre aus Grundsätzen, die genau alle für die späteren Beweise erforderlichen Voraussetzungen enthalten (was für die Grundsätze Euklids bekanntlich nicht gilt), werde daraufhin durchgesehen, welche Grundsätze der Anschauung eines beschränkten Gebietes entspringen. Diese seien hier in kurzer Form zusammengestellt.

A. In einem beschränkten Raumgebiet gelten folgende Grundsätze (Hilbert I, 1—8, II, 1—4, III, 1—4):

Grundsätze der Verknüpfung:

1. Durch zwei Punkte geht stets (mindestens) eine Gerade.
2. Durch zwei Punkte geht nur eine Gerade.
3. Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte, in jeder Ebene mindestens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.
4. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht stets (mindestens) eine Ebene.
5. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht nur eine Ebene.
6. Liegen in einer Ebene zwei Punkte einer Geraden, so auch alle übrigen.
7. Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so auch noch mindestens einen andern.
8. Es gibt mindestens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Grundsätze der Anordnung:

9. Liegt ein Punkt auf einer Geraden zwischen  $A$  und  $B$ , so auch zwischen  $B$  und  $A$ .

10. Wenn  $A$  und  $C$  zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt  $B$ , der zwischen  $A$  und  $C$  liegt, und wenigstens einen Punkt  $D$ , sodaß  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt.
11. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.
12. Liegen in einer Ebene eine Gerade und drei nicht auf ihr gelegene Punkte, und schneidet die Gerade eine der drei durch die Punkte bestimmten Strecken, so auch eine der beiden andern Strecken.

Grundsätze der Kongruenz:

13. Zu einer jeden gegebenen Strecke gibt es auf irgend einer Geraden von irgend einem Punkte aus nach jeder Seite stets eine und nur eine kongruente Strecke. Jede Strecke ist sich selbst kongruent.
14. Sind zwei Strecken einer dritten kongruent, so auch unter einander.
15. Zwei Strecken sind kongruent, wenn sie aus je zwei kongruenten Teilstrecken bestehen.
16. Zu einem jeden gegebenen Winkel gibt es in irgend einer Ebene an irgend einem Halbstrahl nach jeder Seite stets einen und nur einen kongruenten Winkel. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent.

Bemerkungen. Zu 3 und 8: Die entsprechenden Anschauungsbefunde besagen offenbar noch viel mehr als dieses Vorhandensein von zwei, drei, bzw. vier Punkten; da sich aber zeigt, daß das Vorhandensein weiterer Punkte aus den übrigen Grundsätzen (insbesondere 10) geschlossen werden kann, so muß diese möglichst inhaltsarme Form der Grundsätze 3 und 8 gewählt werden, um der Forderung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Grundsätze Genüge zu tun. Zu 7: Hieraus folgt, daß das Raumgebiet der Anschauung auf drei Abmessungen beschränkt ist.

Während die Grundsätze 13—16 nur die formalen Eigenschaften des Begriffs der Gleichheit (Kongruenz) bestimmen, folgen nun zwei Grundsätze, die Inhaltliches über Gleichheit bestimmter Strecken bzw. Winkel aussagen. Dem Umstand entsprechend, daß das für Anschauung nur in bezug auf benachbarte Gebilde möglich ist (ja genau genommen die Anschauung nur die Übereinstimmung von Gebilden, die zur Deckung gebracht werden, aussagt), müssen anstelle der

Hilbertschen Grundsätze III, 5 (Dreieckskongruenz) und IV (Parallelen-  
grundsatz) für unsern Zweck folgende verwandt werden:

17. Stimmen zwei benachbarte Dreiecke in je zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, so auch in den beiden andern Winkeln.
18. Schneiden zwei benachbarte Geraden einer Ebene einander nicht, so sind zwei gleichliegende Winkel, unter denen irgend eine andre Gerade sie schneidet, gleich.

Aus 18 folgt, in Verbindung mit 16, die Einzigkeit der (benachbarten) Parallelen.

Auf Grund dieses Befundes der Anschauung, der sich nur auf ein beschränktes Gebiet bezieht, ist nun ein vollständiges Gefüge aufzubauen, dessen unbeschränkte Geltung forderungsmäßig aufgestellt wird. Wir bezeichnen es mit  $R'_{sm}$ . Um Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit sowohl in sich selbst als auch mit jenen Anschauungsaussagen zu verbürgen, sind hierbei folgende Forderungen zu erfüllen.

B. Forderungen zum Aufbau eines unbeschränkten Gefüges ( $R'_{sm}$ ).

1. In jedem beschränkten Teilgebiet sollen die Grundsätze A 1—18 gelten.
2. Die Grundsätze A 1 und 4 sollen überdies auch für das Gesamtgebiet gelten.
3. Das Abtragen einer Strecke auf einer Geraden von einem Punkte aus ist nach beiden Seiten hin beliebig oft wiederholbar.
4. Durch solche Abtragungen kann stets eine Strecke erreicht werden, auf der ein beliebig gegebener Punkt der Geraden liegt.
5. Die durch A 13—16 bestimmten formalen Eigenschaften der Gleichheitsbeziehungen zwischen Strecken und zwischen Winkeln sollen ihre Gültigkeit im erweiterten Gefüge beibehalten.
6. Die in A 17, 18 für benachbarte Lagen ausgesprochenen Gleichheitsbeziehungen sollen für nicht benachbarte Lagen so erweitert werden, daß anstelle der Gleichheit eine Beziehung tritt, die, in Abhängigkeit von der gegenseitigen Lage der betr. Gebilde, bei deren Annäherung sich stetig der Grenze der Gleichheit nähert (in sinnbildlicher Darstellung:  $\lim_{L_2 = L_1} f(L_2) = f(L_1)$ ).

Bemerkungen. Zu 3: Hieraus folgt nicht, daß die Verlängerung zu immer neuen Punkten führe. Zu 4: Archimedischer Grundsatz

(Hilbert V, 1). Zu 5: Dies ist nicht durch 1 schon ausgedrückt. Es ist genau zu unterscheiden zwischen der Geltung eines Satzes in jedem beschränkten Teilgebiet und der Geltung für das Gesamtgebiet.

Aus B 1 folgt, daß diejenigen Grundsätze, die nur über das beschränkte Teilgebiet selbst etwas aussagen, auch für das erweiterte Gefüge allgemeine Geltung behalten. Dies sind die Grundsätze A 3, 7—10. Außerdem bleiben nach B 2 und 5 in Geltung: A 1, 4, 13—16. Die übrigen Grundsätze dagegen (A 2, 5, 6, 11, 12) gelten zwar nach B 1 in jedem beschränkten Teilgebiet, aber nicht allgemein.

Greifen wir irgend ein sehr kleines Teilgebiet heraus, was heißen soll, daß nur benachbarte Gebilde (im Sinne von A 17, 18) darin enthalten sind, so gilt die Forderung B 4 für das Gesamtgefüge offenbar erst recht für dieses Teilgebiet. Für ein solches gelten ferner A 1—18 ohne Einschränkung. Diese zusammen bilden nun Hilberts Grundsätze, von denen er nachweist, daß sie zum Aufbau der euklidischen Geometrie genügen (den hier nicht verwandten Grundsatz V, 2 hat auch Hilbert selbst nicht zum Aufbau benutzt; s. § 8 Schluß). Unser Gesamtgefüge ist also so beschaffen, daß überall im Kleinen die euklidische Geometrie gilt. Riemann, der diese Eigenschaft »Ebenheit in den kleinsten Teilen« nennt, hat zuerst gezeigt, welche verschiedenen Möglichkeiten des Gesamtgefüges mit dieser Eigenschaft vereinbar sind. Das Kennzeichnende dieser verschiedenen Arten des  $R'_{sm}$  ist eine gewisse dreiwertige Funktion des Ortes, d. h. eine Zuordnung von je drei Zahlen zu jedem Punkt des Raumes (das »Krümmungsmaß« für drei Flächenrichtungen in diesem Punkte). Die Bedeutung dieser Zahlen im Zusammenhang mit unsern Forderungen werde jetzt erläutert.

Unsre Forderungen verlangen, daß das beschränkte Raumgebiet, dessen räumliche Eigenschaften durch die Anschauung gegeben und in den Grundsätzen A 1—18 ausgesprochen sind, nach allen Seiten erweitert werde. Die Eigenschaften der erweiterten Räume sind am besten dadurch zu kennzeichnen, daß angegeben wird, welche Eigenschaften die in ihnen gelegenen Ebenen haben. Die Untersuchung zeigt, daß in allen solchen Ebenen die Grundsätze A 1, 3, 9, 10, 13—16 gültig bleiben. Im Übrigen können sich aber die räumlichen Verhältnisse in den verschiedenen möglichen Ebenen so sehr von einander unterscheiden, wie die auf den gekrümmten Flächen. Bei letzteren werden sie in bekannter Weise durch Angabe ihres Gauß-

schen Krümmungsmaßes für jeden Punkt gekennzeichnet. Sollen nun die räumlichen Verhältnisse in irgend einem Gebiet einer unserer erweiterten Ebenen gekennzeichnet werden, so kann dies auch durch Zuordnung von Zahlen zu den einzelnen Punkten geschehen. Hierdurch wird dann angedeutet, daß an dieser Stelle der Ebene dieselben inneren Verhältnisse gelten, wie in demjenigen Gebiet einer krummen Fläche, dessen Punkten dieselben Zahlen als Krümmungsmaß zugeordnet sind. Diese die Maßverhältnisse innerhalb der Ebene (nicht das Verhältnis zu außerhalb gelegenen Punkten) kennzeichnenden Zahlen, von denen jedem Punkt je einer zugewiesen ist, nennt man nun auch, wie bei der krummen Fläche, (Riemannsches) Krümmungsmaß der Ebene in dem betr. Punkte. Das ist aber nicht so mißzuverstehen, als handele es sich hier um eine in dem erweiterten Raum  $R'_m$  krumm liegende Fläche. Sondern die durch solche Krümmungszahlen gekennzeichnete Ebene ist durchaus in dem Sinne eine Ebene, als es für zwei beliebige ihrer Punkte stets eine Verbindungsgerade gibt, die ganz in der Ebene liegt. So sind dann unter ›Geraden‹ gekrümmte Linien verstanden, zumal da ja auch von geschlossenen Geraden endlicher Länge die Rede ist? Nein, obwohl auch jedem Punkt einer solchen Geraden eine Zahl als ›Krümmung‹ zugeordnet ist. Sie ist insofern eine Gerade, als jede kleine Strecke  $AB$  von ihr kürzer ist als jedes andre Stück irgend einer Linie unsres Raumes zwischen  $A$  und  $B$ ; während doch bei einer krummen Linie eine Sehne stets kürzer ist als der zugehörige Kurvenbogen.

Der dreistufige Raum ist in seinen Maßverhältnissen dann vollständig gekennzeichnet, wenn für jeden Punkt dieses Flächenkrümmungsmaß für drei verschiedene Flächenrichtungen gegeben ist, wir wollen z. B. annehmen, für drei auf einander senkrecht stehende Flächenrichtungen. Gelten nun für jeden Punkt des Raumes dieselben drei Zahlen, so herrschen auch an jeder Stelle des Raumes dieselben Maßverhältnisse wie an jeder andern. Der Raum heißt in diesem Falle homogen. Eine jede Ebene dieses Raumes hat dann in allen ihren Punkten gleiches Krümmungsmaß (›Ebene konstanter Krümmung‹); das aber nicht für alle Ebenen dasselbe zu sein braucht. Sind andererseits in jedem Punkte des Raumes die drei dort geltenden Zahlen einander gleich, so sind dort alle Richtungen des Raumes gleichartig. Der Raum heißt in diesem Falle isotrop. Sind beide Bedingungen erfüllt, so sind alle Punkte und alle Richtungen gleichartig; alle Kennzahlen dieses homogenen und isotropen Raumes

sind einander gleich: das Krümmungsmaß des ›Raumes konstanter Krümmung‹. In diesem Falle sind alle Ebenen des Raumes nicht nur Ebenen konstanter Krümmung, sondern auch alle untereinander gleichartig; die Krümmung ist für alle gleich, und zwar gleich der des Raumes. (Vgl. die Übersicht der Raumarten, S. 15).

Die Ebenen konstanter Krümmung werden, je nachdem diese negativ, gleich Null oder positiv ist, als hyperbolisch, parabolisch (oder euklidisch) bzw. elliptisch bezeichnet. Die räumlichen Verhältnisse in beschränkten Gebieten dieser Ebenen sind dieselben wie die auf folgenden Flächen des üblichen (euklidischen) Raumes: 1) der sog. Pseudosphäre, einer überall sattelförmigen Fläche, 2) der euklidischen Ebene, 3) der Kugel. In allen drei Arten von Ebenen gilt der Kongruenzsatz (anstelle des eingeschränkten Grundsatzes A 17): Stimmen zwei beliebige Dreiecke in je zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, so auch in den beiden andern Winkeln. Daher heißen diese Raumarten auch Kongruenzräume. Die drei Fälle unterscheiden sich durch die Winkelsumme im Dreieck, die kleiner, gleich bzw. größer als zwei Rechte ist; ferner durch die Anzahl der Parallelen: es gibt in einer Ebene zu einer Geraden durch einen Punkt mehrere, eine bzw. keine Gerade, die jene nicht schneidet. Im ersten und zweiten Falle sind die Geraden, die Ebenen und der ganze Raum unendlich; dagegen im elliptischen Raum sind diese drei Gebilde zwar unbegrenzt (d. h. sie haben nirgends ein Ende), aber von endlicher Größe, weil in sich geschlossen; ebenso ist es bei einer Abart des elliptischen Raumes, dem sphärischen, bei dem nicht immer durch zwei Punkte nur eine Gerade geht; in den Teilgebieten dieser beiden Räume gelten dieselben Verhältnisse, sie unterscheiden sich nur durch ihren Zusammenhang im Ganzen.

Wir haben aus den Tatsachen, die uns die Anschauung für ein beschränktes Raumgebiet liefert, mit Hilfe der Aufstellung gewisser Forderungen die verschiedenen Arten vollständiger Raumgefüge gefunden, in deren beschränkten Gebieten überall jene Anschauungstatsachen zutreffen. Der Grund, warum wir nicht engere Forderungen aufgestellt haben, durch die wir nur auf das einfachste jener erweiterten Gefüge, nämlich den ungekrümmten euklidischen Raum gekommen wären, wird erst bei der Erörterung des physischen Raumes ersichtlich werden. Hier sei nur schon festgestellt, daß dies gewiß möglich wäre, z. B. durch die Forderung, daß die Grundsätze A 1—18 nicht nur in beschränkten Teilgebieten, sondern auch im ganzen Ge-

samtgefüge gelten sollten, und ferner A 17 und 18 nicht nur für benachbarte Gebilde, sondern allgemein.

Das betrachtete Gefüge  $R'_{sm}$ , der dreistufige Anschauungsraum, ist nun noch in verschiedener Weise der Verallgemeinerung fähig und von bestimmtem Gesichtspunkt aus auch bedürftig. Die mathematische Behandlung der verschiedenen erwähnten Unterarten des  $R'_{sm}$ , deren unvermitteltes Neben- und Außereinanderstehen als Entweder-Oder vom Gesichtspunkt der wissenschaftlichen Einheitlichkeit höchst unbefriedigend war, hat zu der Erkenntnis geführt, daß es möglich ist, ein vierstufiges Gefüge  $R'_{sm}$  aufzubauen, das diese verschiedenen Arten des  $R'_{sm}$  als Teile enthält, aber nicht als Teile in dem Sinne, wie der  $R'_{sm}$  dreistufige Raumstücke als Teile enthält, sondern so, wie der  $R'_{sm}$  Ebenen, Kugeln und die verschiedensten andern Flächen enthält. Die Anschauung allerdings vermochte ja nicht einmal den  $R'_{sm}$  als Ganzes zu erfassen, geschweige den  $R'_{sm}$ , ja von diesem nicht einmal beschränkte Teilgebiete. Doch da vierstufige Gebilde solcher Gebiete aus den anschauungsgegebenen dreistufigen Gebilden mit Hilfe begrifflicher Beziehungen aufgebaut sind, so ist doch eine der anschauungsmäßigen Erfassung verwandte Vorstellungsweise, die sich aus Anschauungs- und Begriffsmäßigem zusammensetzt, hier möglich. In den früher besprochenen formalen Gefügen  $R_{sm}$  und weiterhin  $R_{sm}$  ...  $R_{nm}$  ist schon der Rahmen gebaut, in den hier die anschauungsmäßigen Glieder nur eingefügt zu werden brauchen. Auf diese Weise können wir vom  $R'_{sm}$  weiter hinaufsteigen zum  $R'_{sm}$  usw. und schließlich zum  $R'_{nm}$ , dem Anschauungsraum mit beliebig vielen Abmessungen. Anschauungsraum soll auch dieses Gefüge noch heißen, trotz der Unmöglichkeit, seine Gebilde, soweit sie selbst mehr als drei Abmessungen haben, in der Anschauung zu erfassen, weil erstens auch alle Anschauungsgebilde, die wir im  $R'_{sm}$  kennen, im  $R'_{nm}$  vorkommen, und zweitens auch jene höherstufigen Gebilde aus anschauungsgegebenen Gliedern zusammengefügt sind.

Dieser Aufstieg zu höherstufigen Räumen ist der eine Weg zur Verallgemeinerung des  $R'_{sm}$  und damit Vereinigung seiner verschiedenen Unterarten. Der andre Weg bleibt bei dreistufigen Gefügen stehen, geht aber dadurch zu übergeordneten Gattungen weiter, daß nur diejenigen räumlichen Eigenschaften ins Auge gefaßt werden, die nicht auf den Maßverhältnissen beruhen. Gerade in den letzteren, ausgesprochen durch die Grundsätze A 13—18, unterscheiden sich die Unterarten des  $R'_{sm}$ . Ein räumliches Gefüge, das auf den Grundbegriffen Punkt, Gerade und Ebene und ihren Beziehungen des Auf-

einanderliegens aufgebaut ist, ohne die Beziehungen der Strecken- und Winkelgleichheit zu verwenden, läßt sich daher so gestalten, daß jene Unterschiede hier wegfallen. Ein solches Gefüge heißt projektiver Raum  $R'_{sp}$ . Das ihm entsprechende formale Gefüge  $R_{sp}$  ist schon erwähnt und durch mehrere Beispiele verdeutlicht worden, von denen das dritte gerade die Anwendung auf diesen  $R'_{sp}$  darstellte (S. 18). Ein noch allgemeineres Gefüge ist der  $R'_{st}$ , der topologische Anschauungsraum. Bei seinem Aufbau wird auch auf die Grundbegriffe Gerade und Ebene verzichtet und außer dem Punkt nur die allgemeineren Begriffe Linie und Fläche verwendet und ihre Beziehungen des Aufeinanderliegens und ihre Zusammenhangsverhältnisse untersucht.

In derselben Weise, wie hier der dreistufige metrische Raum  $R'_{sm}$  zum  $R'_{sp}$  und dann  $R'_{st}$  verallgemeinert worden ist, läßt sich auch der metrische Raum mit beliebig vielen Abmessungen  $R'_{nm}$  zum projektiven  $R'_{np}$  und topologischen  $R'_{nt}$  verallgemeinern. Auch dies geschieht durch bloßes Einsetzen der anschauungsmäßigen Raumgebilde in die entsprechenden formalen Gefüge  $R_{np}$  und  $R_{nt}$ . Wie der  $R_{nt}$  das allgemeinste Gefüge formaler Ordnungsbeziehungen, so stellt der  $R'_{nt}$  das allgemeinste aus anschauungsmäßigen Gliedern gebaute Gefüge dar, den umfassendsten Anschauungsraum, der alle andern möglichen Anschauungsräume teils als Teile, teils als Besonderungen (Spezialisierungen) durch weitere Grundgebilde und -beziehungen in sich trägt. (S. die Übersicht S. 15).



### III. Der physische Raum.

Bei den uns durch die Erfahrung gegebenen Vorgängen, der ›Natur‹, stellen wir außer Beziehungen anderer Art auch solche fest, die in üblicher Sprache räumlich genannt werden: die Beziehungen vor, innerhalb, zwischen, nahe, entfernt usw. Diese Beziehungen sollen hier physisch-räumlich heißen. Die Lehre vom physischen Raum hat also die Aufgabe, festzustellen, welche dieser Beziehungen für die bestimmten, in der Erfahrung vorliegenden Dinge gelten. Die Möglichkeiten der Lösung dieser Aufgabe sollen hier untersucht werden.

Es ist seit jeher darauf hingewiesen und neuerdings auch in mathematischen Untersuchungen häufig berücksichtigt worden, daß die räumlichen Gebilde, deren Namen wir zur Bezeichnung der physisch-räumlichen Beziehungen anzuwenden pflegen, z. B. die Gerade, der Kreis, der rechte Winkel, sich in der Natur gar nicht finden, und wenn sie vorhanden wären, nicht mit voller Genauigkeit festgestellt werden könnten. Da nun im Folgenden von einer andern Unmöglichkeit, gewisse physisch-räumliche Verhältnisse festzustellen, die Rede sein soll, so könnte die Verwechslung entstehen, als meinten wir jene Unmöglichkeit, die teils auf der unregelmäßigen Gestalt der Naturkörper, teils auf der notwendig beschränkten Genauigkeit unsrer technischen Hilfsmittel beruht. Um diese Verwechslung zu vermeiden, machen wir die erdichtete Annahme, der Fehler, der der Herstellung regelmäßig begrenzter Körper (z. B. einer geraden Kante) bzw. der Messung anhaftet, könne nach Belieben auf jedes vorgeschriebene Maß herabgedrückt werden. Da die folgende Untersuchung zeigen soll, wie wenig man über die physisch-räumlichen Verhältnisse auf Grund der Beobachtung auszusagen vermag, so kann diese Annahme nicht zu falschen Folgerungen führen. Wir werden also auch einfach von ›Punkten‹ im physischen Raume sprechen, ohne dabei zu berücksichtigen, daß jede irgendwie bezeichnete oder auch nur kenntliche Stelle im physischen Raum eine wenn auch noch so kleine, von

der Genauigkeit unsrer Beobachtungsmittel abhängige Ausdehnung haben muß.

Auch die Schwierigkeit, daß die Gebilde des physischen Raumes als stetig behandelt werden, während die Physik den un stetigen Aufbau der Körper aus getrennten Teilen lehrt, sei hier nicht erörtert, da sie die Lehre vom physischen Raum nach unsrer bisherigen Kenntnis nicht wesentlich beeinflusst. Daß dies jedoch in Zukunft einmal stattfinden könnte, darf nicht als unmöglich erklärt werden.

Zuerst sei untersucht, ob und wie eine Gerade im physischen Raum feststellbar ist. Es werde z. B. die Kante eines Körpers vor uns hingestellt oder ein Lichtstrahl aufgewiesen (z. B. durch einige verschiedene Stellen, an denen auf einem beweglichen Schirm die Ecke eines Schattens aufgefangen wird) oder auch nur drei oder mehr Punkte gezeigt; und die Frage lautet: sind diese Linien gerade bzw. liegen die drei Punkte auf einer Geraden? Die Feststellung pflegt dadurch zu geschehen, daß man entweder an der zu prüfenden Linie ›entlang sieht‹ oder ein Lineal daran hält oder dergl. Es wird also entweder vom Lichtstrahl oder von der Linealkante schon vorausgesetzt, daß sie gerade sind. Damit ist offenbar die Frage nicht gelöst, sondern nur zurückgeschoben; denn nun ist weiter zu fragen: woher ist bekannt, daß diese Vergleichslinien, Lichtstrahl und Linealkante, zu denen auch noch der Faden eines ruhenden Fadenpendels u. a. m. zu zählen wären, gerade sind? Es ist grundsätzlich unmöglich, dies festzustellen, wenn man sich nur an das hält, was eindeutig aus der Erfahrung hervorgeht, ohne freigeählte Festsetzungen über Erfahrungsgegenstände zu treffen. Solche Festsetzungen, die forderungsmäßig aufgestellt werden, ohne daß sie jemals durch Erfahrung bestätigt oder widerlegt werden könnten, und die die Möglichkeit geben sollen, die physischen Linien daraufhin zu prüfen, ob sie gerade sind oder nicht (genauer: ob sie als gerade gelten sollen oder nicht), können von zweierlei Art sein. Entweder es wird unmittelbar festgesetzt, daß eine Klasse von Linien, die durch irgendwelche bestimmten Naturgegenstände oder -vorgänge dargestellt werden, als gerade gelten soll; dies heiße eine ›Geradensetzung‹. Die Bedingungen, denen jene Klasse von Linien hierfür genügen muß, seien hier nicht erörtert, da dieser Fall der weniger wichtige ist.

Der zweite Weg besteht in der ›Maßsetzung‹. Ungenau ausgedrückt: es wird ein Körper bestimmt, der als starr gelten soll; genau: es wird ein bestimmter Körper und auf ihm zwei bestimmte Punkte gewählt und sodann festgesetzt, welche Maßzahl dem Abstand

dieser Punkte unter den jeweiligen Umständen (Temperatur, Ort, Richtung, Druck, elektrische Ladung usw.) zugeordnet sein soll. Beispiel einer Maßsetzung: es wird festgesetzt, daß die beiden Marken auf dem Pariser Normalmeterstab eine Strecke von  $100 \cdot f(T; \varphi, \lambda, h; \dots)$  cm darstellen; oder: von so und sovielen Fuß oder Yard usw.; m. a. W.: es muß auch eine Einheit gewählt werden; darum geht es uns hier aber nicht, sondern nur um die Festsetzung des Körpers selbst und der Funktion  $f(T, \dots)$ .

Die Prüfung einer physischen Linie auf Geradheit hin ist nun auf Grund einer solchen Maßsetzung in sehr verschiedener Weise möglich. Z. B. kann durch Ausmessung mit Hilfe des festgesetzten Maßkörpers untersucht werden, ob das zu prüfende Linienstück kürzer ist als alle andern Verbindungslinien seiner Endpunkte. Oder man stellt mit Hilfe des Maßkörpers fest, daß zwei andre Körper starr sind, d. h. daß alle Abstände zwischen je zwei Punkten ihrer Oberfläche gleich bleiben (es brauchen hierfür aber nicht alle, sondern nur eine bestimmte Anzahl der Abstände geprüft zu werden). Wenn dann drei oder mehr Punkte des einen ebensoviele Punkte des andern berühren, und der eine läßt sich in bezug auf den andern so bewegen, daß alle diese Berührungen erhalten bleiben, so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden. Ferner sind Ausmessung in einem Koordinatensystem und noch andre Verfahren möglich.

Es scheint der Einwand nahe zu liegen, daß eine solche Maßsetzung gar nicht frei wählbar sei, sondern auf Erfahrungstatsachen beruhe. „Es ist doch aus Erfahrung bekannt, daß z. B. ein Eisenstab bei Erwärmung um  $1^\circ$  (um hier nur diesen wichtigsten Einfluß zu berücksichtigen) um 0,000011 seiner Länge zunimmt. Daraus ist zu entnehmen, daß zwei auf ihm bestimmte Punkte, deren Abstand bei der Temperatur  $T_0$   $a$  Einheiten beträgt, bei seiner jeweiligen Temperatur  $T$  stets den Abstand  $a(1 + 0,000011(T - T_0))$  haben. Wenn ich andre Körper aus Eisen oder andern Stoffen nehme und die entsprechenden Ausdehnungszahlen einsetze, so kann ich alle diese Maßsetzungen als gleichbedeutend ansehen, denn von ihnen ausgehend komme ich ja immer zu der gleichen Maßzahl für irgend eine physische Strecke. Diese gleichwertigen Maßsetzungen seien deshalb nur als eine gezählt und mit  $M_1$  bezeichnet. Wo bleibt nun die freie Wählbarkeit; wo sind die andern möglichen Maßsetzungen, durch die man zu andern Messungsergebnissen als jenen physikalisch üblichen geführt wird, ohne doch in Widerspruch zu bestimmten Erfahrungstatsachen zu geraten?

Zunächst ist daran zu erinnern, daß eine andre Maßsetzung üblich war, als man den Einfluß der Erwärmung auf die Maßstäbe noch nicht zu berücksichtigen pflegte. Da lautete die Maßsetzung ( $M_0$ ): als dauernd gleich gilt der Abstand dieser beiden Marken auf diesem Eisenstab  $A$ , (also unabhängig von der Temperatur). Man machte dann die Erfahrung der Wärmeausdehnung, d. h. man fand, daß der Abstand zweier Punkte eines andern Körpers  $B$ , an dem man keinerlei sonstige Veränderung bemerkte, sich bei verschiedenen Messungen als nicht gleich ergab, nämlich immer dann als kürzer, wenn der Maßstab  $A$  warm war. Es wäre trotzdem möglich gewesen, die Maßsetzung  $M_0$  beizubehalten, indem man das Ergebnis so ausdrückte: die markierte Strecke auf dem Körper  $B$  verändert mit der Zeit ihre Länge, auch wenn alle bekannten Zustandsgrößen von  $B$  selbst (Temperatur, chemische Zusammensetzung, elektrische Ladung usw.) unverändert bleiben, wenn nur ihr Temperaturabstand von  $A$  sich ändert; also eine Fernwirkung, grundsätzlich nicht widersinniger, als die elektrostatische und die der Schwerkraft, mit denen man sich auch lange zufrieden gegeben hat. Aber es war doch ein wichtiger Grund dafür vorhanden, die Maßsetzung  $M_0$  nicht beizubehalten, sondern statt dessen  $M_1$ , die die Temperaturabhängigkeit enthält, aufzustellen. Alle Erfahrungstatsachen wären zwar auch mit der Maßsetzung  $M_0$  zu bewältigen gewesen, d. h. in Gestalt von Naturgesetzen ohne gegenseitige Widersprüche darzustellen; aber diese Naturgesetze hätten eine sehr viel weniger einfache Gestalt angenommen, als es die üblichen der Wärmeausdehnung sind, durch die auf Grund von  $M_1$  die Tatsachen dargestellt werden. Um die Maßsetzung zu finden, die zu der einfacheren Form der Naturgesetze führt, braucht nicht in jedem solchen Falle die ganze Reihe der möglichen Maßsetzungen versuchsweise aufgestellt und daraus die Naturgesetze entwickelt zu werden. Sondern die Auswahl geschieht häufig gewissermaßen instinktmäßig, in vielen Fällen aber, und dahin geht stets das Streben, bewußt nach Grundsätzen des wissenschaftlichen Verfahrens. Diese Grundsätze selbst allerdings sind noch kaum in eine für die verschiedenen Fälle gültige Form gebracht worden, sondern sind, auch wo die Auswahl der Maß- oder andern Setzung bewußt geschieht, meist stillschweigend in der Begründung enthalten. In unserm Beispiel liegt die Sache so: Bei der Messung verschiedener Körper  $B$ , die im Temperaturgleichgewicht sind, mit dem erwärmten Maßstab  $A$  zeigt sich, noch bevor man überhaupt daran denken kann, jene Wirkung in ein Naturgesetz zusammen-

zufassen, der auffällige Umstand, daß nicht nur bei allen Körpern  $B$  jene Fernwirkung eintritt, sondern daß sie sogar zahlenmäßig bei allen die gleiche ist, gleichgültig aus welchem Stoff sie bestehen. Hier kommt folgender Grundsatz des wissenschaftlichen Verfahrens zur Geltung: Zeigen in bezug auf einen Vergleichskörper die andern Körper bei aller sonstigen Verschiedenheit in irgend einer Beziehung ein zahlenmäßig gleiches Verhalten, so ist zur Vereinfachung der gesetzmäßigen Darstellung zu versuchen, diese Übereinstimmung als nur scheinbar hinzustellen, dadurch daß dem Vergleichskörper das entgegengesetzte Verhalten beigelegt wird. Dieser Grundsatz, ein Sonderfall des Machschen Grundsatzes der wissenschaftlichen Sparsamkeit, ist es, der den Auffassungen der Erddrehung, der Erdbewegung um die Sonne, der Bewegung der Sonne in bezug auf die Fixsterne gegenüber den älteren, entgegengesetzten Auffassungen den Vorzug gibt. Derselbe Grundsatz in anderer Wendung hat auch, angesichts der Tatsache der gleichen Fallbeschleunigung für alle Körper, zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip der Schwerkraft geführt. Dieser Grundsatz nun veranlaßt uns, die Maßsetzung  $M_1$  der  $M_0$  vorzuziehen. Aber, und darauf liegt hier unser Augenmerk, die Erfahrungstatsachen können uns nicht dazu zwingen. In diesem Sinne ist die Wahl der Maßsetzung frei und unabhängig von der Erfahrung; nicht aber ist die Wahl willkürlich, sondern sie wird durch Grundsätze ähnlich dem angeführten geleitet und kann dabei die Erfahrungstatsachen berücksichtigen.

Wichtig für unsere Untersuchung ist die Frage, innerhalb welcher Grenzen die Wahl der Maßsetzung überhaupt möglich ist, abgesehen von der Frage, welche bei den besonderen vorliegenden Erfahrungstatsachen die zweckmäßigste sei; es wird also nur verlangt, daß die Maßsetzung zu einer in sich widerspruchsfreien Darstellung führt. Bei näherer Betrachtung (die hier nicht durchgeführt werden kann) ergibt sich, daß die Maßsetzung irgend zwei Punkte auf der Oberfläche eines beliebigen Naturkörpers wählen darf, mag dieser nach üblicher Betrachtungsweise auch beliebige Gestaltveränderungen erleiden, falls nur die Bedingung erfüllt ist, daß die beiden Punkte sich nie berühren.

Nehmen wir z. B. einen Gummikörper  $C$ , der vielfach seine Gestalt wechseln mag, wobei aber die beiden Maßpunkte auf ihm sich nie berühren sollen. Ist nun die Maßsetzung ( $M_2$ ): »Diese beiden Punkte auf  $C$  haben immer den gleichen Abstand« mit keiner Erfahrungstatsache im Widerspruch? Gewiß nicht. Zwar werden die

auf Grund von  $M_2$  angestellten Messungen sehr merkwürdige Ergebnisse liefern; alle andern Körper werden gewaltige Gestaltveränderungen erleiden, die mit den üblichen Naturgesetzen nicht in Einklang zu bringen sind, sondern andre erfordern. Sind diese Gestaltveränderungen dann stets in einen gesetzmäßigen Zusammenhang zu bringen, oder werden etwa solche auftreten, die dem Grundsatz »unter gleichen Umständen geschieht Gleiches« widersprechen? Das kann nicht vorkommen. Denn dieser Grundsatz ist ja erfüllt, wenn  $M_1$  als Maßsetzung gilt (d. h. in der gewöhnlichen Physik); hier wird also nach jenem Grundsatz der Abstand der beiden Maßpunkte auf  $C$  sich nur dann ändern, wenn irgendwelche andern Umstände sich ändern, die dann Ursache jener Abstandsänderung auf  $C$  genannt werden. Gilt nun  $M_2$ , wird also der Punktabstand auf  $C$  als unveränderlich aufgefaßt, so erleiden die andern Körper, soweit sie in bezug auf  $M_1$  als starr gelten, gerade dann und nur dann Gestaltänderungen, wenn jene Umstände eintreten. Diese werden jetzt als Ursache der Änderung der andern Körper aufgefaßt. Ursachlose Veränderung kommt also auch bei Geltung von  $M_2$  nicht vor. Aber wie können die erheblichen »tatsächlichen« Gestaltveränderungen von  $C$  geleugnet werden? Sie sind nicht »tatsächlich«, wenn sie nicht feststellbar sind. Und sie sind feststellbar nur durch Abmessen mit einem andern Körper, etwa einem eisernen Maßstab  $D$ . Diesen können wir aber nur dann als zur Messung tauglich ansehen, wenn wir in einer frei gewählten Maßsetzung den Abstand der beiden Maßpunkte auf  $D$  als unveränderlich erklären; die Tatsachen zwingen uns, wie wir gesehen haben, nicht hierzu; sie widersprechen also auch nicht, wenn  $D$  auf Grund von  $M_2$  als nicht starr erklärt wird.

Wir fassen das Ergebnis der bisherigen Überlegung zusammen. Die Frage, ob drei oder mehr gegebene physische Punkte in gerader Linie liegen, ist aus den Erfahrungstatsachen allein ohne eine gewisse Festsetzung, deren Wahl uns freisteht, nicht zu lösen und daher ohne Bezug auf eine solche Festsetzung sinnlos. Die hier erforderliche Festsetzung geschieht entweder durch Geradensetzung oder durch Maßsetzung. Im letzteren Falle wird der Abstand zweier beliebiger physischer Punkte, die sich aber nie berühren dürfen, irgend einer Zustandsfunktion gleichgesetzt. Die Maßsetzung liefert mehr als die Geradensetzung: nicht nur das Mittel zur Entscheidung über Geradheit von physischen Linienstrecken, sondern auch über ihre Größenverhältnisse.

Dieses Ergebnis setzt uns in den Stand, die Bedingungen zur Aufstellung physisch-räumlicher Gefüge zu erkennen. Im  $R'_t$  hatten

wir ein Gefüge des Anschauungsraumes, das ohne die Begriffe der Geraden und der Streckengleichheit aufgebaut war. Das ihm entsprechende Gefüge  $R''_{3i}$ , den (dreistufigen) topologischen, physischen Raum, können wir demnach aufbauen, ohne über Geradheit und Größenverhältnisse der physischen Linien entscheiden zu müssen, also ohne Geradensetzung und Maßsetzung. Die einzigen Beziehungen, die zur Einordnung der erfahrungsgegebenen physisch-räumlichen Gebilde in ein solches Gefüge erforderlich sind, sind die Beziehungen des Ineinanderliegens (Inzidenz) von Punkten, Linien, Flächen, Raumstücken. Diese Beziehungen für physisch-räumliche Gebilde können ohne Übereinkunft über irgend eine gewählte Festsetzung der Erfahrung entnommen werden.

Da keine bisherige Erfahrung uns nötigt, ein höheres als dreistufiges Gefüge zu wählen, so bleibe der  $R''_{3i}$  hier außer Betracht. Daß es keine physischen Raumgebilde von mehr als drei Abmessungen gibt, ist aber keine unbedingte Gewißheit, sondern nur Erfahrungswahrscheinlichkeit. Noch viel weniger ist die Dreistufigkeit etwa Bedingung zur Möglichkeit eines Erfahrungsgegenstandes überhaupt. Denn es kann leicht angegeben werden, welche (grundsätzlich denkbaren, nur bisher nicht vorgekommenen) Erfahrungstatsachen vorliegen müßten, damit wir sie als Gebilde von vier Abmessungen auffassen würden.

Wir sahen, daß nur der topologische Raum (worunter wir jetzt immer den dreistufigen  $R''_{3i}$  verstehen wollen) das in der Erfahrung Vorliegende eindeutig wiedergibt. Dagegen ist schon der projektive Raum  $R''_{3p}$  nicht eindeutig, da wir zu seinem Aufbau eine Geradensetzung wählen und aufstellen müssen, wozu verschiedene Möglichkeiten vorliegen. Und noch weniger sind wir für den Aufbau eines metrischen Raumgefüges  $R''_{3m}$  eingeschränkt; hier gibt es unendlich viele verschiedene Arten. Von welcher Art das aufgebaute Gefüge wird, ist von der Maßsetzung, die wir wählen, abhängig.

Dieser Zusammenhang zwischen der freigewählten Maßsetzung und dem sich daraus ergebenden physischen Raumgefüge bildet einen Kernpunkt der ganzen Frage und bedarf noch eingehender Erörterung. Dazu müssen wir eine wichtige Unterscheidung einführen. Es handelt sich um die Zerlegung des in der fertigen Erfahrung Vorliegenden in zwei Bestandteile, die zwei verschiedenen Quellen entspringen. Die beabsichtigte Zerlegung ist der in Stoff und Form der Erfahrung verwandt, aber nicht gleich. Denn die letztere Zerlegung teilt nicht den Bestand der fertigen Erfahrung in zwei Teile, sondern benennt

zwei Teilkräfte (Komponenten, Faktoren), durch deren Zusammenwirken jedes Einzelglied der fertigen Erfahrung überhaupt erst möglich ist; eine Einzelaufweisung ist nicht möglich: ungeformter Stoff ist nicht aufzeigbar, sondern eine bloße Denkabspaltung. Wir wollen anstatt dessen den Schnitt innerhalb des Gebietes der Form machen zwischen notwendiger und wahlfreier Form. Der zwar nicht ungeformte, aber nur in der notwendigen Form erscheinende Stoff heiße »Tatbestand« der Erfahrung. Dieser kann noch einer weiteren Formung in wahlbestimmter Form unterworfen werden. Um eine Erfahrungsaussage daraufhin zu prüfen, ob sie eine Tatbestandsaussage ist oder nicht, und in letzterem Falle, was in ihr den Tatbestand betrifft und was von der wahlbestimmten Form abhängt, ist zu untersuchen, ob die Erfahrungsaussage für alle möglichen Formungen, hier für unsre Untersuchung: für alle möglichen Arten von Raumgefügen, gültig bleibt. Mathematisch ausgedrückt ist dies dann der Fall, wenn der Inhalt der Erfahrungsaussage unveränderlich (invariant) ist gegenüber ein-eindeutigen, stetigen Raumumbildungen (Transformationen). Dies trifft nun zu für alle topologischen Aussagen und nur für diese, d. h. für die Aussagen über Ineinanderliegen und Zusammenhang der Raumgebilde, und damit für alle Aussagen in bezug auf den topologischen physischen Raum  $R''_{3i}$  und nur in bezug auf diesen. Dagegen sind alle Aussagen in bezug auf  $R''_{3p}$  und  $R''_{3m}$  nicht unveränderlich gegenüber jenen Raumumbildungen, gelten also nicht für alle möglichen Formungen, die sich aus den verschiedenen Maßsetzungen ergeben. Sie sind deshalb keine reinen Tatbestandsaussagen, sondern von wahlbestimmter Form abhängig. Und zwar gehört alles das nicht zum Tatbestand, was den Begriff der Geraden und der Ebene für den  $R''_{3p}$ , und für den  $R''_{3m}$  dazu noch die Begriffe der Strecken- und Winkelgleichheit enthält. Tatbestandsaussagen sind z. B.: »dieser Porzellankörper wird von diesem Glaskörper allseitig umgeben« oder »die Berührungsfläche dieses Körpers (Tisch) mit diesem Körper (Fußboden) besteht aus drei getrennten Teilen«; denn sie bleiben immer gültig, nach was für einer Maßsetzung man auch die Körper ausmessen mag. Dagegen ist die Erfahrungsaussage »diese beiden Punkte dieses Körpers haben den gleichen Abstand wie jene beiden sie jetzt nicht berührenden eines andern Körpers« keine Tatbestandsaussage, sondern von wahlbestimmter Form abhängig; würde ich etwa die Maßsetzungen unsrer früheren Beispiele ( $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ) verwenden, so brauchte die Aussage gewiß nicht immer gültig zu bleiben; sie bezieht sich nur auf eine

bestimmte Gruppe von Maßsetzungen und damit auf bestimmte Unterarten des  $R''_{3m}$ .

Der Begriff des Tatbestandes, als des Gesamtinhaltes solcher Tatbestandsaussagen, ermöglicht es, genauer zu erkennen, wie sich aus der Wahl einer Maßsetzung ein bestimmter metrischer Naturraum, eine bestimmte Unterart des  $R''_{3m}$  ergibt. Diese Gefüge  $R''_{3m}$  sind, wenn auch der  $R''_{3t}$  den Vorzug vor ihnen hat, sich aus dem Tatbestand eindeutig zu ergeben, doch unvergleichlich viel wichtiger für Naturwissenschaft und Leben, weil es hier auf Messung ankommt.

Wir wählen also eine Maßsetzung, z. B.: »Diese beiden Punkte  $A$  und  $B$  auf diesem Stück Eisen sollen als Maßpunkte gelten«. Damit ist gesagt, daß der Abstand der Punkte als dauernd gleich aufgefaßt werden soll und daher als Maßstab dienen kann. Die Gründe zur Wahl gerade dieses Körpers und der beiden Punkte  $A$  und  $B$  sind hier nicht von Belang; sie werden später erörtert werden; hier ist nur das Ergebnis unsrer früheren Überlegung wichtig, daß die Aufstellung dieser Maßsetzung nie zu Widersprüchen mit der Erfahrung führen kann; wir können uns jetzt genauer ausdrücken: mit dem Tatbestand der Erfahrung. Wir stellen jetzt Versuche an, die uns lehren sollen, welcher Art dasjenige physisch-räumliche Gefüge  $R''_{3m}$  ist, das mit der gewählten Maßsetzung und dem Tatbestand der Erfahrung vereinbar ist. Dabei achten wir darauf, daß wir ja keine anderen Voraussetzungen benutzen, als die genannte Maßsetzung und von der Erfahrung nur die Tatbestandsaussagen, also insbesondere nicht unvermerkt ein Wissen um euklidische Geometrie hineinbringen.

Das Verfahren der Versuche, die wir anstellen wollen, ist grob und umständlich; die Lehrsätze der Geometrie des  $R''_{3m}$  (die für alle seine Unterarten gelten und daher hier angewandt werden dürfen, ohne dadurch eine bestimmte Unterart, etwa die euklidische, schon vorausgesetzt zu haben) könnten uns einfachere Verfahren zur Bestimmung des  $R''_{3m}$  liefern; wir legen hier aber größeren Wert auf die Durchsichtigkeit als auf die Sparsamkeit des Verfahrens und wählen deshalb eines, das eins der früher angegebenen unterscheidenden Merkmale der Unterarten von  $R''_{3m}$  benutzt, nämlich die Winkelsumme im ebenen Dreieck.

Um bei der Anstellung der Versuche einer Mehrdeutigkeit zu entgehen, ist noch der folgende wichtige Umstand zu beachten. Was wir hier als physischen Raum  $R''$  bezeichnen, ist selbst nicht die Form räumlichen Geschehens, sondern vielmehr nur eine dreistufige

Projektion dieser Form, nämlich der vierstufigen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit. Nun können aus letzterer in verschiedener Weise dreistufige Projektionen gebildet werden durch Wahl von drei Achsenrichtungen. Unter bestimmten Bedingungen (wenn nämlich keine der drei Achsen in den Minkowskischen »Vor- und Nachkegel« fällt) ist eine solche Projektion als Raum aufzufassen. So sind mehrere Raumgefüge möglich, die verschiedenen Bestimmungen der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an verschiedenen Punkten entsprechen. Von dieser Mehrdeutigkeit können wir uns aber frei machen, wenn wir uns die Beschränkung auf solche Raumverhältnisse auferlegen, die von der Bestimmung der Gleichzeitigkeit unabhängig sind. Das geschieht dadurch, daß wir bei den folgenden Messungsversuchen die Lage zweier räumlicher Gebilde zu einander nur bei gegenseitiger Ruhe feststellen. Soll z. B. die »gleichzeitige« Berührung der Punkte  $A, B, C$  eines Körpers mit je einem der Punkte  $A', B', C'$  eines andern Körpers festgestellt werden, so darf dies nicht bei nur augenblicksweiser Berührung geschehen, sondern ist so vorzunehmen: ein Beobachter begibt sich (gleichgültig, mit welcher Geschwindigkeit) von  $A$  über  $B, C, A, B$  nach  $C$ ; drei andre Beobachter bleiben in  $A, B$  bzw.  $C$ , und jeder von ihnen stellt fest, daß die Berührung mit dem entsprechenden Punkt  $A', B'$  bzw.  $C'$  dauernd erhalten bleibt zwischen den beiden Zeitpunkten, in denen der erste Beobachter an ihm vorbeikommt. Damit ist für alle Möglichkeiten der Gleichzeitigkeitsbestimmung ein gleichzeitiges Stattfinden der drei Berührungen  $AA', BB', CC'$  nachgewiesen. Da andre Feststellungen als solche über Punktberührungen bei den folgenden Versuchen nicht vorkommen, so haben wir uns durch diese Vorsichtsmaßregel für die Feststellungen der Eigenschaften des physischen Raumes von der sonst unumgänglich erforderlichen Rücksicht auf die Zeitbestimmung freigemacht.

Wir beginnen jetzt die Messungen mit Hilfe des in der Maßsetzung bestimmten Eisenkörpers, der die beiden Maßpunkte  $A, B$  trägt. Wir haben ein (physisches) Flächenstück  $f$ , etwa die obere Fläche einer Tischplatte, gefunden oder hergestellt, das folgende Bedingungen 1—5 erfüllt.

1)  $A$  und  $B$ , sowie zwei andre Punkte  $C$  und  $D$  des Eisenkörpers lassen sich stets zur gleichzeitigen Deckung bringen mit den vier Punkten  $A_1, B_1, C_1, D_1$  auf  $f$ . Durch wiederholte Versuche zeigt sich: so oft die drei Punkte  $A, B, C$  oder  $A, C, D$  oder  $B, C, D$  sich mit den ihnen entsprechenden decken, ist stets auch das vierte

Punktpaar in Berührung. Ferner lassen sich  $A$  und  $B$  stets in gleichzeitige Deckung mit  $B_1$  und  $C_1$  bringen; ebenso auch mit  $C_1$  und  $D_1$ , und auch mit  $D_1$  und  $B_1$ . Wir wollen nun eine Punktmenge, ein Linien-, ein Flächenstück oder einen Körper »starr« inbezug auf eine bestimmte Maßsetzung nennen, wenn inbezug auf sie der Abstand je zweier Punkte der Menge dauernd gleich bleibt. Nach dieser Begriffsbestimmung ist also zunächst, wenn wir jetzt immer unsre Maßsetzung ( $A, B$ ) voraussetzen, das Punktpaar  $A, B$  starr; ferner nach dem Versuch auch die mit diesem stets zur Deckung zu bringenden Paare  $A_1, B_1$ ;  $B_1, C_1$ ;  $C_1, D_1$ ;  $D_1, B_1$ . Daraus folgt wiederum nach dem ersten Versuch die Starrheit des Punktpaares  $C, D$ ; und weiterhin die der vier Punkte  $A_1, B_1, C_1, D_1$  und danach auch der Punkte  $A, B, C, D$ .

2) Wir bringen  $A, B, C, D$  mit vier andern Punkten  $A_2, B_2, C_2, D_2$  auf  $f$  zur Deckung; die wiederholten Versuche zeigen auch hier das gleiche Ergebnis. Also sind auch  $A_2, B_2, C_2, D_2$  starr. So finden wir weiter bei allen Punktgruppen von je vier Punkten  $A_n, B_n, C_n, D_n$  auf  $f$ , die mit  $A, B, C, D$  zur Deckung gebracht werden können, und mit denen wir die gleichen Versuche anstellen wie mit  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , dasselbe Verhalten. Es findet sich kein solcher Punktvierer, der nicht als starr befunden würde. Die ganze Fläche  $f$  ist demnach starr. Dies Verhalten wird während der folgenden Versuche zwischen durch immer wieder nachgeprüft und dauernd bestätigt gefunden.

3) Während nach dem ersten Versuch die Berührungen je dreier der vier Punktpaare  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  stets die des vierten mit sich führten, falls dies vierte nicht das Paar  $CC_1$  war, trifft das in diesem letzteren Falle nicht zu: wir beobachten, daß  $A, B, D$  die entsprechenden Punkte berühren,  $C$  aber zwar anfangs, dann jedoch nicht mehr, während noch jene drei Berührungen erhalten geblieben sind. Die beiden starren Punktgruppen  $A, B, C, D$  und  $A_1, B_1, C_1, D_1$  haben sich also inbezug auf einander bewegt, wobei drei Punktpaare in Berührung geblieben sind. Dies ist das Kennzeichen der physischen Geraden; auf einer solchen liegen demnach  $A, B, D$ , und ebenso  $A_1, B_1, D_1$ .

4) Wir bringen  $A$  mit  $A_1$  zur Berührung, und gleichzeitig  $B$  nacheinander mit verschiedenen dann noch möglichen Punkten  $B'_1, B''_1, \dots$ . Dann kommt es nie vor, daß nicht auch  $D$  mit einem Punkt von  $f$  in Berührung ist; diese Punkte seien  $D'_1, D''_1, \dots$ . Dann liegen  $A_1, B'_1, D'_1$  auf einer Geraden, ebenso  $A_1, B''_1, D''_1$  usw.

5) Diesen gleichen Versuch stellen wir, wie in  $A_1$ , so auch in  $A_2, A_3$  usw. an, und beobachten in jedem beliebigen Punkt von  $f$  das gleiche Verhalten. Daraus schließen wir, daß die Fläche  $f$  in jedem Punkt in allen Richtungen gerade Strecken trägt. Also ist  $f$  eben.

Nun wollen wir die räumlichen Verhältnisse in dieser physischen Ebene untersuchen. Als Prüfmittel verwenden wir die Winkelsumme im Dreieck. Mit ihr hängen, wie schon erwähnt, die die Maßverhältnisse in der Ebene kennzeichnenden Zahlen (Krümmungsmaße) in gesetzmäßiger Weise zusammen. Je nachdem an einer Stelle der Ebene das Krümmungsmaß gleich, kleiner oder größer als Null ist, ist dort die Winkelsumme eines (kleinen) Dreiecks gleich, kleiner oder größer als  $180^\circ$ , also ein Winkel eines gleichseitigen Dreiecks gleich, kleiner oder größer als  $60^\circ$ . Sechs um einen Punkt herumliegende gleichseitige Dreiecke schließen sich also in den drei Fällen bzw. gerade aneinander oder lassen einen Winkel frei oder überdecken sich teilweise. Wir suchen deshalb auf  $f$  um  $A_1$  herum sieben Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$  derart auf, daß  $AB$  nacheinander mit  $A_1, B_1$ , mit  $A_1, B_2, \dots$  und mit  $A_1, B_7$  zur Deckung gebracht werden kann; ferner auch mit  $B_1, B_2$ , mit  $B_2, B_3, \dots$  und mit  $B_6, B_7$ . Dann sehen wir zu, ob  $B_7$  mit  $B_1$  zusammenfällt oder nicht; im ersten Falle hat die Ebene  $f$  an der Stelle  $A_1$  die Krümmung Null, im zweiten ein positives oder negatives Krümmungsmaß (man sagt dann auch kurz: sie ist hier gekrümmt; dabei gelten aber wieder die früheren Bemerkungen über die Bedeutung dieser übertragenen Ausdrücke, vgl. S. 28).

Um nicht nur das Bestehen der Krümmung, sondern auch ihre Maßzahl feststellen zu können, müssen wir aus unsrer Maßsetzung ein Verfahren zur Messung von Strecken ableiten. Wir stellen zu diesem Zwecke einen Körper her, auf dessen Oberfläche ein einfach zusammenhängendes Linienstück  $g$  sich durch folgende Versuche als starre, gerade Kante zeigt. Wir prüfen die Punkte von  $g$  mit den beiden Punkten  $A, B$  unsres Maßkörpers in ähnlicher Weise, wie wir die Fläche  $f$  geprüft haben. Entsprechend dem Versuch 1 zeigen wir zuerst, daß die Endpunkte  $P_0$  und  $P_{10}$  von  $g$  ein starres Punktpaar bilden, und zwar, daß sie denselben Abstand wie  $A$  und  $B$  haben. Darauf wird durch Vergleich mit der starren Ebene  $f$  entsprechend den Versuchen 1 und 3 gezeigt, daß für einen Punkt  $Q$  auf  $g$  die drei Punkte  $P_0, Q, P_{10}$  starr sind und auf einer Geraden liegen. Wird dann in weiteren Versuchen dies für jeden beliebigen Punkt  $P$  von  $g$  immer bestätigt gefunden, dann ist damit  $g$  als starre,

gerade Kante nachgewiesen. Nun markieren wir, um etwa in üblicher Weise mit Zehnteln der Einheitsstrecke  $AB = P_0P_{10}$  messen zu können, neun Punkte  $P_1 \dots P_9$  auf  $g$  derart, daß die zehn Punkt-paare  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_9P_{10}$  sich als abstandsgleich erweisen, indem sie nacheinander mit einem Punktpaar  $MN$  auf  $f$  zur Deckung gebracht werden. Ebenso können wir auch jede Teilstrecke wieder in zehn gleiche Teile teilen, und so fort, soweit die Genauigkeit der mit diesem Maßstab vorzunehmenden Messungen es verlangt bzw. die Beobachtungsgenauigkeit es gestattet.

Der Abstand irgend zweier Punkte  $K, L$  eines andern Körpers, der kleiner ist als der Abstand  $AB$  (sonst müßten wir in leicht ersichtlichem Verfahren einen längeren Maßstab herstellen), kann jetzt mit dem Maßstab  $g$  gemessen werden: wir legen den Maßstab so an, daß  $K$  mit  $P_0$ , und  $L$  auch mit einem Punkt von  $g$  sich deckt. Liegt letzterer z. B. in der Teilstrecke  $P_0P_7$ , so ist der Abstand  $KL$  mit der durch diese Teilung bestimmten Genauigkeit gleich 0,6, wobei  $AB$  als Maßeinheit genommen ist. Um genauer zu messen, muß die Unterteilung der Strecke  $P_0P_7$  berücksichtigt werden. Von grundsätzlicher Bedeutung ist hier, daß diese Überlegung zeigt: zur Streckenmessung werden, nachdem auf Grund der Maßsetzung ein Maßstab hergestellt ist, lediglich topologische Eigenschaften festgestellt, also nur »Tatbestandsaussagen«, nämlich das Sichberühren von Punkten und das Liegen eines Punktes auf einer Strecke.

Mit dem so hergestellten Maßstab kehren wir zur Fläche  $f$  zurück. Wir hatten um den Punkt  $A_1$  herum die Ecken gleichseitiger Dreiecke gezeichnet, ohne aber mit den bisherigen Hilfsmitteln auch die Seiten feststellen zu können. Dies geschieht nun in einfacher Weise mit Hilfe der Kante  $g$ . Wir bringen  $P_0P_{10}$  nach einander mit  $A_1B_1$  und  $B_0B_1$  zur Deckung und markieren dabei alle diejenigen Punkte auf  $f$ , die sich mit den Punkten von  $g$  berühren. Dann stellen wir fest, ob die Strecken  $A_1B_1$  und  $B_0B_1$  einen Punkt gemeinsam haben. In diesem Falle ist das Krümmungsmaß entweder gleich Null, wenn nämlich die zusammenfallenden Punkte  $B_1$  und  $B_0$  sind, oder positiv, wenn andre Punkte zusammenfallen. Haben die beiden Strecken keinen gemeinsamen Punkt, so ist das Krümmungsmaß negativ. (Die Fälle außerordentlich starker Krümmung, Krümmungsmaß etwa  $\pm 1$ , mögen hier außer Betracht bleiben, da sie nichts grundsätzlich andres enthalten; es kommen nur andre Strecken zum Schnitt, und die spätere Berechnung ändert sich). Nun messen wir den Abstand  $a$  der Punkte  $B_1$  und  $B_0$  mit dem Maßstab  $g$ , also in

Bruchteilen der Einheitsstrecke  $AB$ ; wir geben dann der Maßzahl  $a$  positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem sich durch das genannte Kennzeichen das Krümmungsmaß als positiv oder negativ herausgestellt hat. Die so gefundene Zahl  $\pm a$  könnten wir nun unmittelbar als Krümmungsmaß auffassen. Wir können aber auch, um mit der üblichen Bezeichnungsweise in Übereinstimmung zu bleiben, das Gauß-Riemannsche Krümmungsmaß  $k$  berechnen, das für nicht allzu starke Krümmung zu  $a$  proportional ist:  $k = \frac{2}{\sqrt{3}} a$ .

Wir haben somit das Krümmungsmaß des Ebenenstücks  $f$  an der Stelle  $A_1$  bestimmt. Um die Maßverhältnisse im ganzen Gebiet  $f$  zu bestimmen, müssen dieselben Versuche an verschiedenen andern Punkten angestellt werden. Wieviele Punkte hierzu zu nehmen sind, ist keine grundsätzliche Frage, sondern hängt davon ab, welche Genauigkeit für die Darstellung der gesamten Maßverhältnisse von  $f$  erreicht werden soll, und wird sich auch danach richten, ob starke Unterschiede des Krümmungsmaßes für verschiedene Orte gefunden werden. Sind die Feststellungen für  $f$  geschehen, so muß in der gleichen Weise der ganze übrige Raum durchgemessen werden: es sind überall Platten herzustellen, die ebenso wie  $f$  als starr und eben nachgewiesen werden müssen, und auf diesen ist das Krümmungsmaß zu bestimmen. Und zwar muß dies in jedem Punkt des Raumes für drei Flächenrichtungen geschehen. Wenn wir das ganze Weltall so durchgemessen haben, so ist eindeutig der besondere metrische Raum, ein ganz bestimmter Unterfall von  $R_{3m}''$ , gefunden, der mit dem Tatbestande der Erfahrung und der gewählten Maßsetzung in Übereinstimmung ist. Wählen wir irgend eine andre Maßsetzung, so finden wir auch durch das gleiche Verfahren eindeutig ein bestimmtes, im Allgemeinen anderes physisches Raumgefüge.

Die Darstellung dieses Versuchsverfahrens hat lediglich den Zweck, zu zeigen, daß erstens die Feststellung der Maßverhältnisse des physischen Raumes nur einen Sinn hat, wenn eine frei wählbare Maßsetzung aufgestellt worden ist, und daß zweitens diese Feststellung dann aus der Erfahrung nur den Tatbestand benutzt, d. h. nur topologische Eigenschaften der physischen Raumgebilde beobachtet und verwertet, ohne Voraussetzungen über Geradheit irgend welcher physischer Linien, etwa der Lichtstrahlen, über Parallelität, über Homogenität des Raumes (in dem früher angegebenen Sinne) u. dergl. zu machen. Damit ist der häufig erhobene Einwand widerlegt, daß

die Feststellung der Maßverhältnisse des physischen Raumes durch Versuche einen Zirkelschluß enthalte, da sie Voraussetzungen mache, die sie erst beweisen wolle.

Dies die grundsätzliche Bedeutung des Verfahrens. Die wirkliche Ausführung der Versuche dagegen würde sich ganz anders gestalten, einerseits erleichtert, andererseits erschwert werden. Wir können jenes äußerst umständliche und in größeren Gebieten technisch gar nicht durchführbare Verfahren bedeutend vereinfachen: wie wir mit den Maßpunkten  $A, B$  die Fläche  $f$  geprüft haben, können wir auch die Eigenschaften der Lichtstrahlen prüfen und die Strahlen dann in bequemerer Weise zum Aufbau der Figuren verwenden. Als solche brauchen wir auch nicht die sechs gleichseitigen Dreiecke mit dreizehn abzutragenden und einer zu messenden Strecke zu nehmen, sondern können einfachere Figuren benutzen. Es zeigt sich als möglich und besonders geeignet, eine recht große Figur zu wählen, an der nur sehr kleine Strecken zu messen sind. Dies ist z. B. der Fall, wenn ein großes, aus Lichtstrahlen gebildetes Dreieck gewählt wird, dessen Winkel dadurch bestimmt werden, daß an Meßgeräten, die in den Ecken aufgestellt sind, gewisse Strecken gemessen werden. Dies Verfahren hat Gauß angewandt, mit Hilfe des Dreiecks Inselsberg—Brocken—Hoher Hagen. Zu der Verwendung von Lichtstrahlen ist jedoch zu bemerken, daß in diesem Falle die Außerachtlassung der Zeitbestimmung nicht zulässig ist, da die früher genannten Vorsichtsmaßregeln, die uns das Recht dazu gaben, dann nicht anwendbar sind.

Die Schwierigkeiten, die sich andererseits bei der wirklichen Durchführung solcher Versuche ergeben, beruhen darauf, daß (die übliche Maßsetzung  $M_1$  vorausgesetzt) das Krümmungsmaß sich überall entweder als Null oder doch als äußerst klein herausstellt, sodaß das Verfahren mit dem herumbewegten Eisenstück viel zu ungenau wäre, und nur solche Verfahren, die große Gebiete zu durchmessen gestatten, also wohl nur solche mit Lichtstrahlen, Aussicht auf Erfolg bieten.

Das gegenseitige Abhängigkeitsverhältnis zwischen Tatbestand, Maßsetzung und Art des physischen Raumes haben wir bisher so betrachtet, daß die Maßsetzung gewählt, und danach die Eigenschaften des physischen Raumes gefunden wurden. Jetzt wollen wir umgekehrt vorgehen und zeigen, wie es auch möglich ist, die Maßverhältnisse des physischen Raumes in freier Wahl zu bestimmen, und wie sich dann eine Maßsetzung findet, die auf

Grund des Tatbestandes die gewählte Raumart ergibt, und sich danach die Gestalt der einzelnen Naturgesetze richtet. Wie wir im obigen Beispiel bei der Darstellung der Versuche, um das Grundsätzliche deutlicher hervortreten zu lassen, viel stärkere Krümmungen annahmen, als sie sich bei der wirklichen Ausführung der Versuche zeigen, so wollen wir auch jetzt ein Raumgefüge wählen, das von dem üblichen sehr stark abweicht. Das Grundsätzliche, die Wählbarkeit der Raumart, wird hierdurch klarer, als wenn wir etwa den ungekrümmten (euklidischen) Raum  $R_{in}'' =$  wählen wollten. Ihn würde man in Wirklichkeit vermutlich stets nehmen, wenn man von der Wahl des Raumes ausgeht, weil er der einfachste ist.

Im Gegensatz zu obigem Beispiel verwenden wir aber jetzt nicht erdachte Versuchsergebnisse, sondern die der bestehenden Physik. Dies ist besonders an den Stellen zu beachten, wo infolge anderer Deutung der physikalischen Beobachtungen ganz andere Maßverhältnisse von den Dingen, z. B. der Erde, ausgesagt werden als in der Physik; die topologischen Verhältnisse, die einzigen, die die physikalische Beobachtung tatsächlich feststellen kann, sollen stets mit der Physik in Einklang bleiben.

Um ein anschauliches Beispiel zu nehmen, werde bestimmt: die Erdoberfläche  $E$  soll als Ebene gelten. Da  $E$ , auf Grund der üblichen Maßsetzung  $M_1$ , vermessen, sich als Kugel herausstellt (der Einfachheit halber lassen wir die Abplattung außer Betracht), so wird sich hier eine andere Maßsetzung als erforderlich erweisen. Aber die Wahlfreiheit in bezug auf das Raumgefüge ist mit der Festsetzung jener Bestimmung noch nicht zu Ende. Es steht uns nämlich noch frei, zu bestimmen, welches Krümmungsmaß die Ebene  $E$  an den verschiedenen Punkten haben und wie der übrige Raum beschaffen sein soll. Wir können also z. B. bestimmen,  $E$  solle überall das Krümmungsmaß Null haben. Dann würde die Erdoberfläche als unendlich groß aufgefaßt werden können und überall auf ihr die euklidische Geometrie der Ebene gelten. Der Kürze halber wollen wir hier nicht darauf eingehen, diese seltsam erscheinende Auffassung durchzuführen und nachzuweisen, daß sie tatsächlich mit keiner physikalischen Erfahrung, also auch nicht mit den Ergebnissen der geodätischen Messungen optischen oder mechanischen Verfahrens in Widerspruch steht, wofür nur diese anders gedeutet werden als üblich, nämlich nicht auf Grund der Maßsetzung  $M_1$ , sondern einer andern  $M_2$ .  $M_2$  müßte dabei etwa folgende Form haben: ›Diese beiden Punkte  $A, B$  auf diesem Eisenkörper stellen einen Abstand dar, der



nicht als dauernd gleich gelten, sondern (außer von Temperatur, Magnetisierung usw. in dem und dem Maße) vor allem von dem Ort auf  $E$ , an dem sich der Körper befindet, in der und der Weise abhängig sein soll. Dabei müßte diese Abhängigkeit so angegeben werden, daß dabei irgend ein Punkt von  $E$ , z. B. der Ort, an dem sich gerade jetzt der Eisenkörper befindet, oder der Nordpol, in bestimmter Weise bevorzugt erscheint. Wollen wir nicht, daß in der Maßsetzung eine solche Bevorzugung eines Punktes von  $E$  auftritt, so müssen wir bestimmen, daß  $E$  als Ebene mit überall positivem Krümmungsmaß gelten soll, das dem Betrage nach dem Krümmungsmaß gleich ist, das  $E$  auf Grund von  $M_1$  als Kugel hat. Dann wird die Maßsetzung keine Abhängigkeit vom Ort auf  $E$  mehr enthalten.

Jetzt können wir noch über die Werte des Krümmungsmaßes für das ganze übrige Weltall verfügen. Wir wollen das einfachste Gefüge wählen, das mit den schon getroffenen Bestimmungen in Einklang gebracht werden kann: der Raum soll homogen und isotrop sein, also in allen Punkten und in jeder Flächenrichtung dasselbe Krümmungsmaß haben. Da dieses schon für  $E$  als positiv bestimmt ist, so ist damit die Wahl auf einen  $R_{inh}''$  gefallen.

Nun ist zu untersuchen, welche Maßsetzung zu diesem gewählten Raumgefüge gehört. Anstatt der Ableitung sei gleich das Ergebnis genannt, und dann geprüft, ob es mit jenem Raumgefüge und dem Tatbestand der physikalischen Erfahrung, also insbesondere mit allen astronomischen und irdischen Raummessungen in Einklang zu bringen ist. Die Maßsetzung ( $M_a$ ) lautet: »Diese beiden Punkte  $A, B$  auf diesem Eisenkörper stellen einen Abstand dar, der zwar als unabhängig von dem Ort auf  $E$ , aber (außer von Temperatur, Magnetisierung usw. in demselben Maße wie bei  $M_1$ ) als abhängig von der Höhe  $h_s$  über  $E$  gelten soll:  $l = l_0(1 - \sin h_s)$ «.

Über Einheiten und Zahlenwerte später. Zunächst sehen wir, daß  $M_a$  mit  $M_1$  genau übereinstimmt, soweit es die Verhältnisse auf  $E$  selbst angeht. Infolgedessen sind alle Strecken auf  $E$ , die in der Physik als gleich gelten, auch hier als gleich anzusehen. Nach  $M_1$  sind nun die Hauptkreise der Erdkugel die kürzesten Linien auf  $E$ . Folglich sind sie es auch nach  $M_a$ . Und da hierbei, wie noch durch Messungen außerhalb von  $E$  bestätigt werden soll,  $E$  eine Ebene ist, so sind die gleichen Linien hier die Geraden. Wegen der Übereinstimmung in bezug auf  $M_1$  und  $M_a$  auf  $E$  gelten die physikalischen cm-Maßstäbe, soweit sie auf  $E$  angewandt werden, auch für die  $M_a$ -Messung. Wir wollen aber, um einfachere Formeln für die Ver-

hältnisse im ganzen Raum zu bekommen, nicht 1 cm oder 1 m als Längeneinheit wählen, sondern 6370 km. In dieser Einheit wird die Gesamtlänge jeder Geraden, z. B. des Äquators oder der Meridiane, gleich  $2\pi$ . Wie leicht zu übersehen, geht durch irgend zwei Punkte von  $E$  im Allgemeinen zwar nur eine Gerade; sind diese Orte aber Gegenpole (z. B. Nord- und Südpol, oder Beobachtungsort und Gegenfüßlerort), so gehen durch sie unendlich viele Geraden. Dadurch ist die Ebene  $E$  als besondere Abart der elliptischen Ebene (»sphärische Ebene«) gekennzeichnet. Wegen der für unsern Raum bestimmten Homogenität ist er selbst damit auch als »sphärischer Raum« festgelegt; die ihn ergebende Maßsetzung und die danach gemessenen Strecken seien deshalb mit  $M_s, l_s, h_s$  bezeichnet.

Alle Geraden in diesem Raum haben die Länge  $2\pi$ . Die größte Entfernung, die irgend zwei Punkte von einander haben können, ist  $\pi$ ; der größte Abstand eines Punktes von einer Ebene  $\pi/2$ ; dies ist also auch der Höchstwert von  $h_s$ . Der Raum selbst ist zwar unbegrenzt, d. h. jede irgendwo befindliche gerade Strecke kann stets nach beiden Seiten verlängert werden, aber nicht unendlich; sein Gesamt-rauminhalt beträgt  $2\pi^2$ . Er wird durch jede Ebene in zwei Hälften zerlegt; so auch durch  $E$ : sowohl der Erdkörper, als auch der Raum außerhalb der Erde hat also den Inhalt  $\pi^2$  (oder 400 Millionen  $\text{km}^3$ ).

Wir gehen zur Maßsetzung  $M_s$  zurück und wollen prüfen, was aus ihr über die Maßverhältnisse außerhalb von  $E$  folgt, und insbesondere, ob sich durch die Messungen, wenn wir sie nach  $M_s$  ausdeuten,  $E$  als Ebene bestätigt. Die Maßeinheit für die in  $M_s$  vorkommenden Strecken ist schon bestimmt. Aber  $M_s$  enthält scheinbar einen Zirkel: die Bestimmung des Maßes außerhalb von  $E$  wird abhängig gemacht von  $h_s$ , und diese Höhe kann doch erst gemessen werden, wenn wir ein Maß haben. Der Zirkel verschwindet aber bei näherem Zusehen; die Angabe ist durchaus eindeutig, denn sie besagt: eine physische Strecke, die sich ebenso verhält wie die in  $M_s$  genannte Maßstrecke, und die auf  $E$  gemessen die Länge  $a$  hat, hat senkrecht in die Höhe gerichtet die Länge  $x_s$ , die mit  $a$  verknüpft ist durch die Gleichung

$$\int_0^{x_s} \frac{dx}{1 - \sin x} = a.$$

Denn nach der Angabe der Maßsetzung hat jedes Stück  $dx$  des aufgerichteten Stabes, das sich in der Höhe  $x$  befindet, auf den Erd-

boden gebracht die Länge  $\frac{dx}{1 - \sin x}$ . Die Integration ergibt

$$a = \operatorname{tg} x_s + \frac{1}{\cos x_s} - 1; \text{ hieraus folgt: } \operatorname{tg} x_s = \frac{a}{2} \cdot \frac{2+a}{1+a} \text{ (im 1. oder}$$

4. Quadranten zu nehmen, je nachdem  $a$  positiv oder negativ, d. h. je nachdem die Strecke von  $E$  aus nach außen oder ins Erdinnere hinein aufgerichtet wird). Damit ist also die Länge einer senkrecht gestellten Strecke, deren Länge, wenn sie auf  $E$  liegt, gemessen ist, eindeutig bestimmt.

Die Entfernung eines im Zenit stehenden Sternes, die nach  $M_1$  noch so groß sein mag, bleibt so nach  $M_s$  kleiner als  $\pi/2$ . Die aus den astronomischen Messungen zu schließende Tatbestandsaussage, daß man viele Billionen Eisenstäbe, von denen jeder auf  $E$  als 1 m (also in unsern Einheiten  $\frac{1}{6730000}$ ) gemessen ist, senkrecht aufeinander stellen müßte, um bis zu jenem Stern zu gelangen, ist nach  $M_s$  so zu deuten: die aufeinander gestellten Stäbe erleiden alle eine Verkürzung, die bei den nahe an  $E$  befindlichen sehr gering ist, mit wachsender Entfernung aber immer beträchtlicher wird, und dadurch eine sehr große ›scheinbare Länge‹ der Strecke vortäuscht. So hat z. B. der Mond die ›scheinbare‹ Entfernung 59,3 von  $E$ ; die Entfernung nach  $M_s$  beträgt  $\pi/2 - 0,0335$ . Nähert sich die Entfernung nach  $M_s$  immer mehr dem größten Wert  $\pi/2$  ( $= 10000$  km), so wächst die ›scheinbare‹ Entfernung ins Unendliche. Eine noch so große, durch astronomische Messung festgestellte Entfernung bildet also keinen Widerspruch zu den Eigenschaften unsres endlichen Raumes.

Aus  $M_s$  geht hervor, daß der Abstand der beiden Maßpunkte und folglich auch jede andre physische Strecke, die sich ebenso verhält wie diese Maßstrecke, ins Erdinnere gebracht an Stelle einer Verkürzung eine Verlängerung erleidet, während die ›scheinbare‹ Länge der Strecke (nämlich die nach  $M_1$  gemessene) unverändert bleibt. So hat z. B. die Strecke zwischen zwei Gegenfüßlerorten, also ein Durchmesser des Erdkörpers, die Länge  $\pi$  anstelle der ›scheinbaren‹ Länge 2.

Hiernach können wir nun auch eine Probe darauf machen, ob sich  $E$  durch die Messungen nach  $M_s$  als Ebene bestätigt. Nach  $M_1$  könnte z. B. durch folgenden Versuch nachgewiesen werden, daß  $E$  keine Ebene ist, sondern eine krumme Fläche, deren hohle Seite zum Erdinnern gerichtet ist: es werden irgend zwei Orte auf  $E$  einerseits

durch die kürzeste Verbindungslinie über  $E$  hin, andererseits durch einen geradlinigen Tunnel verbunden; der Tunnel wird dann stets kürzer als die Verbindungslinie auf  $E$  gefunden. Dieses Ergebnis, das zwar nicht einer unmittelbaren Messung entspringt, aber nach  $M_1$  aus den geodätischen Messungen eindeutig erschlossen werden kann, muß nach  $M_s$  so gedeutet werden: der Tunnel ist nur scheinbar kürzer, nämlich infolge jener Verlängerung der Stäbe, die nach  $M_1$  als Maßstäbe benutzt werden. Die Berechnung ergibt, daß, wenn die Maßsetzung  $M_s$  angewandt wird, der Tunnel stets länger ist, als jene kürzeste Verbindung der beiden Orte auf  $E$ . Die nähere Untersuchung zeigt auch, daß nicht nur jener Tunnel (der deshalb nach  $M_s$  auch keine Gerade ist), sondern auch jede beliebige andre Verbindungslinie der beiden Orte, mag sie außerhalb oder innerhalb des Erdkörpers verlaufen, nach  $M_s$  stets länger ist als die kürzeste Verbindung auf  $E$ . Letztere Verbindungslinie ist dadurch als gerade Strecke und, da das Gleiche für jede beliebige Stelle von  $E$  gilt,  $E$  als Ebene nachgewiesen, und damit gezeigt, daß  $M_s$  in dieser Beziehung den für den gewählten Raum aufgestellten Forderungen entspricht.

Der Einwand, daß das Verhalten der Lichtstrahlen (Auftauchen von Gegenständen am Horizont, Kreisschatten der Erde bei Mondfinsternis, u. a.) die Kugelgestalt der Erde eindeutig erkennen lasse, ist nach unsern Überlegungen leicht zu widerlegen. Denn die genannten Schlüsse beruhen ja auf der Voraussetzung der Geradheit der Lichtstrahlen. Wir wissen aber, daß die Geradheit irgendwelcher physischer Linien immer nur für bestimmte Maßsetzungen gilt. Nun wird freilich die Geradheit der Lichtstrahlen in bezug auf  $M_1$  durch eine Menge von Erfahrungstatsachen, schon im täglichen Leben, erzeugt. Auf Grund der gleichen Tatsachen aber sind die Lichtstrahlen in bezug auf  $M_s$  nicht als Geraden aufzufassen, sondern als krumme Linien, und zwar, wie die nähere Untersuchung zeigt, als Kreise, die alle durch den ›Zenitpunkt‹  $Z$  gehen. Die nach  $M_s$  auf  $E$  senkrecht stehenden Geraden, die alle auch nach  $M_1$  gerade sind und auf  $E$  senkrecht stehen, die also in jedem Ort von  $E$  die Zenitrichtung angeben, schneiden sich nach  $M_s$  nicht nur in der Entfernung  $\pi/2$  im Mittelpunkt der Erde, sondern auch in der gleichen Entfernung von  $E$  in dem außerhalb des Erdkörpers gelegenen ›Zenitpunkt‹  $Z$ , der danach Gegenpol des Erdmittelpunkts ist. Auch hier sehen wir wieder, daß in bezug auf  $M_s$   $E$  sich nach beiden Seiten hin, ins Erdinnere und nach außen, gleichartig verhält, was für keine andre Fläche als

eine Ebene der Fall ist. Nach  $M_1$  ist zwischen irgend zwei Punkten nur ein für den Lichtstrahl möglicher Weg vorhanden, nämlich die Gerade; diese Eindeutigkeit bleibt bei  $M_2$  bestehen; für irgend zwei Punkte gibt es nur einen Kreis, der auch durch  $Z$  geht.

Bei der Maßsetzung  $M_2$  müssen wir offenbar zu andern Naturgesetzen kommen, als den üblichen, die auf Grund von  $M_1$  aufgestellt sind. Die erforderlichen Änderungen sind auf den verschiedenen Gebieten nicht gleich groß. Die nach  $M_2$  geltende kreisförmige Gestalt der Lichtstrahlen z. B. gestattet die Beibehaltung der Wellentheorie des Lichts, insbesondere auch der elektromagnetischen Theorie und damit aller optischen Gesetze; nur sind wir genötigt, dem sog. leeren Raum nicht überall das Brechungsverhältnis 1 zuzuschreiben, sondern

$$\text{ein von der Entfernung von } E \text{ abhängiges: } n_s = \frac{1}{1 - \sin x_s}.$$

Wie nach der gewählten Maßsetzung  $M_2$  die Naturgesetze eine andre als die übliche Form anzunehmen haben, sei noch am Beispiel des Energiesatzes in der Mechanik (des »Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft«) gezeigt, da hier eine naheliegende Überlegung zunächst zu dem Ergebnis zu führen scheint, daß dieser grundlegende Satz in bezug auf die nach  $M_2$  vorgenommenen Messungen nicht aufrecht erhalten werden könne. Denken wir uns eine Vorrichtung, mit deren Hilfe eine kleine Kugel durch die Spannungsenergie einer zusammengedrückten Spiralfeder fortgeschleudert werden kann. Die Energie der genannten Feder ändert sich nicht, wenn ich die Vorrichtung an irgend einen andern Ort bringe. Sie teilt daher auch, so lehrt die Physik, gleichgültig wo der Versuch angestellt wird, der Kugel jedesmal die gleiche Bewegungsenergie mit, was nach der üblichen Begriffsbestimmung dadurch gemessen wird, daß die Kugel überall mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit, nehmen wir an: 10 m/sek, fortfliegt. Messen wir aber nach der Maßsetzung  $M_2$ , so finden wir nicht überall die gleiche Geschwindigkeit, denn die Strecke, die nach  $M_1$  10 m lang ist, wird ja nach  $M_2$  als  $10 \cdot (1 - \sin x_s)$  m gemessen, wenn sie sich in der Entfernung  $x_s$  von  $E$  befindet; auf dem höchsten Berg der Erde z. B. als 9,986 m, auf dem Mond nur noch als 0,55 cm. Würde also die Bewegungsenergie  $L_s$  einer Masse  $m_s$ , die die Geschwindigkeit  $v_s$  hat, bestimmt als  $\frac{1}{2} m_s v_s^2$ , so wäre die Bewegungsenergie der Kugel, in die sich die überall gleiche Spannungsenergie der Feder umsetzt, in großen Höhen kleiner als auf  $E$ , der Energiesatz also nicht erfüllt.

Die durch dieses Beispiel angedeutete Überlegung führt bei genauerer Durchführung zu dem Ergebnis, daß entweder die Sätze der gewöhnlichen Mechanik bei der Maßsetzung  $M_2$  ungültig werden, oder die Grundbegriffe der Mechanik teilweise andre Begriffsbestimmungen erhalten müssen. Ziehen wir den zweiten Weg vor, so können anstelle der nach  $M_1$  gemessenen Größen: Länge  $l$ , Zeit  $t$ , Masse  $m$ , Geschwindigkeit  $v$ , Beschleunigung  $b$ , Kraft  $K$ , Arbeit  $A$ , Bewegungsenergie (»lebendige Kraft«)  $L$ , und Potential  $V$ , die nach  $M_2$  gemessenen:  $l_s$ ,  $t_s$ ,  $m_s$ , usw. so bestimmt werden, daß die begriffsbestimmenden Gleichungen (in denen wir hier zur Einfachheit anstatt des Vektors oder der drei Komponenten nur eine schreiben) für  $v_s$ ,  $b_s$ ,  $A_s$ ,  $V_s$  den üblichen genau entsprechen:

$$v_s = \frac{dl_s}{dt_s}, \quad b_s = \frac{d^2 l_s}{dt_s^2}, \quad A_s = K_s \cdot l_s, \quad -\frac{\partial V_s}{\partial l_s} = K_s.$$

Aber anstelle der Begriffsbestimmung  $K = m \cdot b$  muß treten:

$$K_s = \frac{m_s \cdot b_s}{(1 - \sin x_s)^2},$$

und anstelle von  $L = \frac{1}{2} m v^2$ :

$$L_s = \frac{1}{2} m_s \cdot \frac{v_s^2}{(1 - \sin x_s)^2}.$$

Hierdurch wird erreicht, daß, wenn ein bestimmter Vorgang sowohl nach  $M_1$  als auch nach  $M_2$  beobachtet und gemessen wird, nicht nur Zeit und Masse, sondern auch Arbeit, Bewegungsenergie und Potential in beiden Messungen die gleiche Maßzahl erhalten: es ist dann nämlich  $t_s = t$ ,  $m_s = m$ ;  $A_s = A$ ,  $L_s = L$ ,  $V_s = V$ . Für Länge, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft ergeben dagegen die beiden Messungen verschiedene Zahlen:  $l_s = l \cdot (1 - \sin x_s)$ ,  $v_s = v \cdot (1 - \sin x_s)$ ,  $b_s = b (1 - \sin x_s)$ ;  $K_s = \frac{K}{1 - \sin x_s}$ . Besonders wichtig sind die Gleichungen  $L_s = L$  und  $V_s = V$ . Aus ihnen folgt, daß sowohl der Energiesatz der Mechanik gültig bleibt:  $L_s + V_s = \text{const.}$ , als auch ein anderer für die Mechanik grundlegender Satz, das Hamiltonsche Prinzip:

$$\int_{t_{s,0}}^{t_{s,1}} \delta(L_s - V_s) dt_s = 0.$$

Nach diesen Gesetzen werden, wenn das Schwere-Potential einer Masse  $m_s$  in bezug auf die Erde gefunden ist als

$$V_s = V = -\frac{mg}{r} = -\frac{m_s g \cdot \cos x_s}{1 + \sin x_s},$$

alle unter dem Einfluß der Erdschwere verlaufenden Vorgänge: schiefer Wurf, Pendelbewegung, (monatliche) Bewegung des Mondes usw. mit denselben Ergebnissen berechnet, wie sie beobachtet werden, obwohl die bei diesen Vorgängen gemessenen Größen z. T. erheblich von den üblichen, nach  $M_1$  gemessenen abweichen: der Mond kreist z. B. als Kugel vom Durchmesser 1,92 km um den Zenitpunkt  $Z$  im Abstand von 213 km herum.

Wir verlassen hiermit dieses Beispiel. Daß das hier gewählte Raumgefüge zur Darstellung der Erfahrungstatsachen durchaus nicht zweckmäßig ist und daher nie ernstlich gewählt werden wird, ist sicher. Aber hier handelt es sich nicht um die Frage der Zweckmäßigkeit, die später erörtert werden wird. Sondern die Bedeutung des Beispiels liegt darin, die grundsätzliche Möglichkeit der Wahl eines ganz andern als des üblichen Gefüges für den physischen Raum zu zeigen, das aber ebenso alle Erfahrungstatsachen widerspruchlos darzustellen imstande ist.

Wir haben jetzt das zwischen dem Tatbestand der Erfahrung  $T$ , der Maßsetzung  $M$  und dem metrischen Raumgefüge  $R$  (nämlich der bestimmten Art des  $R'_{\text{em}}$ ) bestehende Abhängigkeitsverhältnis nach zwei verschiedenen Seiten hin betrachtet. Das frühere Beispiel (Ausmessung der Fläche  $f$ ) zeigte, wie sich nach Wahl von  $M$  ein bestimmter  $R$  aus  $T$  ergab. Im letzten Beispiel ( $E$  als Ebene) wurde umgekehrt vorgegangen: es wurde  $R$  gewählt, und dann ergab sich, daß es ein bestimmtes  $M$  gab, das den Tatbestand  $T$  in die Form des gewählten Gefüges brachte. Beides zusammenfassend können wir also sagen:  $T$ ,  $R$  und  $M$  stehen in einem derartigen Funktionalverhältnis zu einander, daß, wenn zwei von ihnen gegeben sind, die dritte Bestimmung dadurch eindeutig mitgegeben ist;  $R = f_1(M, T)$ ;  $M = f_2(R, T)$ . Denn auch der dritte Fall  $T = f_3(M, R)$  trifft zu: durch  $M$  und  $R$  ist  $T$  eindeutig gegeben. Hierauf beruht ja die wissenschaftliche Darstellung des räumlichen Tatbestandes: es wird angegeben, daß bei einem bestimmten  $M$  die physischen Raumgebilde in einem bestimmten Maßgefüge  $R$  geordnet sind, und durch diese Angabe ist der Tatbestand  $T$  der Erfahrung in bezug auf räumliche Verhältnisse vollständig beschrieben. Doch unterscheidet sich dieser dritte Fall sehr wesentlich von den andern durch den Umstand, daß zwar entweder  $R$  oder  $M$  frei gewählt werden darf, nicht aber  $T$ : der Tatbestand ist eindeutig gegeben.

Hier erhebt sich nun eine für das wissenschaftliche Verfahren der Darstellung von  $T$  durch  $R$  und  $M$  wichtige Frage. Wir können ja entweder  $R$  oder  $M$  frei wählen, wonach dann die betr. andre Bestimmung sich mit Rücksicht auf  $T$  eindeutig ergibt. Welchen dieser beiden Wege sollen wir nun einschlagen? Und wenn wir einen davon nehmen, nach welchen Gesichtspunkten soll dann die Wahl von  $R$  bzw.  $M$  getroffen werden? Die zweite Frage ist leichter zu lösen als die erste, obwohl sie zwischen vielen Möglichkeiten entscheiden soll. Es zeigt sich nämlich, daß sowohl unter den Möglichkeiten für  $R$  als unter denen für  $M$  sich je ein Fall befindet, der sich deutlich als der einfachste erweist. Wollten wir also wirklich eins der beiden Bestimmungsstücke frei wählen, ohne Rücksicht auf das sich dadurch ergebende andre und die hieraus hervorgehende Darstellung von  $T$ , so würde die Entscheidung nicht zweifelhaft sein: bei der Wahl von  $R$  würden wir dem  $R'_{\text{em}}$ , dem euklidischen Raumgefüge, den Vorzug geben; andererseits bei der Wahl von  $M$  der schon genannten Maßsetzung  $M_0$  (Metallstab ohne Rücksicht auf Temperatur und andre Einflüsse) als der einfachsten.

Sind nun die in der Geschichte aufgetretenen Lehrgebäude der Physik teils vom  $R'_{\text{em}}$ , teils von  $M_0$  ausgegangen? Nein; das erstere ist zwar meist geschehen, gewöhnlich unausgesprochen; das letztere dagegen niemals, seitdem der in bezug auf  $M_1$  als Wärmeausdehnung bezeichnete Tatbestand bekannt ist. Und auch in den Fällen, wo ein andres Raumgefüge als der  $R'_{\text{em}}$  aufgestellt (Einsteins) oder als möglich ins Auge gefaßt worden ist (Gauß, Riemann, Helmholtz, Schwarzschild), ist niemals  $M_0$  als Maßsetzung verwandt worden.

Diese Tatsache muß Bedenken darüber hervorrufen, ob das richtige Verfahren der Wissenschaft darin bestehen darf, einen dieser beiden Wege: freie Wahl des einfachsten  $R$  oder des einfachsten  $M$ , einzuschlagen. Besinnen wir uns darauf, daß die für das Verfahren der wissenschaftlichen Darstellung geltende Forderung nach Einfachheit sich auf die Gesamtdarstellung des Tatbestandes bezieht, so erkennen wir, daß nur insoweit möglichste Einfachheit für die unabhängig vom Tatbestand wählbaren Bestimmungen zu fordern ist, als hierdurch für den auf Grund dieser Bestimmungen erfolgten Aufbau größere Einfachheit erzielt wird. Das Letztere bleibt immer Maßstab: Einfachheit des Baues geht vor Einfachheit des Bauens und seiner Hilfsmittel.

Es soll also weder  $R$  noch  $M$  ohne Rücksicht auf  $T$  frei gewählt werden, wenn auch an der denkmäßigen Möglichkeit dieser Wahl

immer festgehalten werden muß. Sondern es ist gewissermaßen ein vermittelnder Weg einzuschlagen, der weder vom einfachsten  $R$  noch vom einfachsten  $M$  ausgeht, und der seine Berechtigung erst am Ziel erweist, indem er zu dem einfachsten aus den jeweiligen Erkenntnissen bestehenden Aufbau führt.

Über die Abhängigkeit des Raumgefüges von der Erfahrung, genauer: des metrischen Gefüges  $R'_m$  vom Tatbestand  $T$ , ist also zu sagen:  $R$  ist nicht durch  $T$  selbst bestimmt, also in diesem Sinne nicht erfahrungsabhängig, wohl aber, wenn wir zu  $T$  noch einen zwecksetzenden, das Verfahren betreffenden Gesichtspunkt (teleologisches und methodisches Prinzip) hinzunehmen, nämlich den der Einfachheit. Durch diesen allein ist  $R$  auch nicht bestimmt, sondern nur durch ihn und  $T$  zusammen; und zwar eindeutig, wenn es möglich ist, über die Erfüllung jener Forderung der Einfachheit im einzelnen Fall nach allgemeingültigen Regeln zu entscheiden. Nehmen wir die Einfachheitsforderung als zur Begriffsbestimmung der Wissenschaft gehörig, so dürfte das Verhältnis zwischen  $R$  und  $T$  vielleicht so ausgedrückt werden:  $R$  ist denkmäßig wahlfrei und erfahrungsunabhängig, aber wissenschaftlich durch  $T$  bestimmt, oder besser: zu bestimmen; um hierdurch zum Ausdruck zu bringen, daß nicht im Tatbestand  $T$  ein gewisser  $R$  schon eingeschlossen liegt, sondern erst auf Grund jener Forderung aufgestellt werden soll.

Da nur jener vermittelnde Weg zum Ziel führt, ist mit Recht die einfachere Maßsetzung  $M_0$  zugunsten der weniger einfachen  $M_1$  aufgegeben worden, sobald bestimmte Tatbestandserkenntnisse vorlagen (Wärmeausdehnung). Ebenso würde aber auch anstelle des euklidischen Raumgefüges ein andres treten müssen, wenn hierdurch der Gesamtaufbau vereinfacht würde. Dieser Forderung wird auch zustimmen, wer der Ansicht ist, daß diese Bedingung nie verwirklicht werde. Diese Auffassung vertrat z. B. noch Poincaré. Nach den heute vorliegenden Erkenntnissen dürfte allerdings nicht ohne nähere Untersuchung die Unerfüllbarkeit der Bedingung behauptet werden.

Vor die Frage, die von einer solchen Untersuchung zu lösen wäre, sind wir durch die allgemeine Relativitätstheorie gestellt. Sie soll hier nicht beantwortet, sondern nur als deutliches Entweder-Oder aufgestellt werden. Die durch die vorangehende Erörterung geklärten Begriffe setzen uns nämlich in den Stand, die mit dieser Theorie verknüpfte Frage der Berechtigung der nichteuklidischen Geometrie in der Physik genauer zu fassen. Die Theorie selbst soll hierbei nicht geprüft, sondern in dem Sinne als richtig vorausgesetzt

werden, als stehe keine Erfahrungstatsache im Widerspruch zu ihr. Diese Voraussetzung erscheint einerseits nach der mehrfachen Bestätigung durch Beobachtungen als begründet, andererseits als zweckmäßig, da bei der Behandlung der Relativitätstheorie von Seiten der Philosophie und Wissenschaftslehre die Aufmerksamkeit sich mit Recht in höherem Grade der weiteren Frage zuwendet, in welcher Form das Lehrgebäude darzustellen sei. Für uns kommen hier die darin enthaltenen Behauptungen nur soweit in Betracht, als sie räumliche Verhältnisse betreffen. Dabei ist aber wieder daran zu erinnern, daß ihre gesonderte Betrachtung eine denkmäßig erlaubte, aber in bezug auf die Beobachtungen selbst (den ›Tatbestand‹) nicht eindeutige Loslösung aus dem einheitlichen Raum-Zeit-Gefüge bedeutet, die i. A. nur für eine bestimmte Begriffsfestsetzung über die Gleichzeitigkeit einen Sinn hat. In besonderen Fällen ist es aber möglich, zu eindeutigen, d. h. von der Begriffsbestimmung der Gleichzeitigkeit unabhängigen Aussagen über räumliche Verhältnisse zu gelangen, wenn wir nämlich die oben bei der Ausmessung der Fläche  $f$  (S. 41) besprochene Vorsichtsmaßregel anwenden, indem wir uns auf solche Aussagen über lang andauernde Punktberührungen beschränken, die in der beschriebenen Weise durch mehrere Beobachter festgestellt werden. Der Kürze halber verwenden wir zwar einfach die Ausdrucksweise: nach der Maßsetzung  $M_n$  finden wir für die zwei Punkte  $A$ ,  $B$  den und den Abstand, oder stellen wir fest, daß die drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf einer Geraden liegen. Doch soll dabei immer darauf geachtet werden, daß diese Aussagen stets derart sind, daß sie sich (wie bei der Ausmessung von  $f$  geschehen) auf Punktberührungen zurückführen lassen und daß die hierbei vorkommende Gleichzeitigkeit verschiedener Punktberührungen den früher beschriebenen Sinn hat.

Die beiden Formen, in denen unter Voraussetzung der allgemeinen Relativitätstheorie die räumlichen Verhältnisse in einem Schwerfeld, z. B. in der Umgebung der Sonne, dargestellt werden können, sind nun (neben unendlich vielen andern, weniger einfachen) folgende:

1. Wir wählen als Maßsetzung wieder  $M_1$ , wie bisher in der Physik üblich. Die Beobachtungen auf Grund von  $M_1$  ergeben, daß die Länge eines jeden Stabes zwar abhängig von Temperatur, Magnetisierung, elastischen Beanspruchungen usw., aber nicht von Ort oder Richtung im Schwerfeld ist. Die entsprechend der beschriebenen Ausmessung von  $f$  vorzunehmende Ausmessung des Raumes im Schwerfeld (wobei wir wieder von der nicht grundsätzlichen, sondern

nur technischen Schwierigkeit infolge des sehr kleinen Krümmungsmaßes absehen) würde ergeben, daß hier nicht überall das Krümmungsmaß Null ist, sondern z. B. auf einer Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne bei Annäherung von außen an die Oberfläche der Sonne immer stärker negativ wird, und zwar ringsherum im gleichen Abstand von der Sonne in gleicher Weise.

2. Die früheren Überlegungen haben gezeigt, daß sich immer eine Maßsetzung finden läßt, auf Grund deren der Tatbestand in die Form des euklidischen Raumgefüges  $R_{3n}'' =$  gebracht werden kann. Es muß also auch eine solche Maßsetzung  $M_2$  geben, die zu einem euklidischen Gefüge für das Verhalten der Körper im Schwerfeld gelangt. Dazu ist allerdings erforderlich, daß in die Maßsetzung nicht nur, wie bei  $M_1$ , die Temperatur ( $T$ ) und andre physikalische Zustandsgrößen hineingenommen werden, sondern auch Ort und Richtung, genauer: die Entfernung ( $r$ ) vom Mittelpunkt der das Schwerfeld erzeugenden Masse ( $m$ ) und der Winkel  $\varphi$  zwischen Maßstrecke und  $r$ . Daß dieses Vorkommen einer Längenbestimmung ( $r$ ) in der Maßsetzung nicht auf einen Zirkelschluß hinausläuft, ist oben in einem ähnlichen Beispiel ( $M_2$ ) gezeigt worden; ebenso steht es mit der Bestimmung des Winkels  $\varphi$ , wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Winkelmessung auf Längenmessung zurückführt. Während  $M_1$ , wenn wir zur Einfachheit von den physikalischen Zustandsgrößen hier nur die Temperatur anführen und uns auf die einfachste Gestalt der Abhängigkeitsbeziehung beschränken, etwa lautet: »Diese beiden Punkte  $A, B$  dieses Eisenstabes sollen als Maßpunkte gelten; ihr Abstand stellt bei der Temperatur  $T$  die Strecke  $l = l_0(1 + \beta(T - T_0))$  dar«, so lautet  $M_2$ : »Diese beiden Punkte  $A, B$  dieses Eisenstabes sollen als Maßpunkte gelten; ihr Abstand stellt bei der Temperatur  $T$ , in der Entfernung  $r$  von der Masse  $m$ , unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $r$  die Strecke dar:  $l = l_0(1 + \beta(T - T_0)) \left(1 - C \left(\frac{m}{r} \cdot \cos \varphi\right)\right)$ ; hierbei ist  $C$  eine unveränderliche Größe (im cm-gr-sek-Maß  $3,72 \cdot 10^{-29}$ )«. Messen wir auf Grund dieser Maßsetzung, so zeigt sich wie bei  $M_1$  eine Ausdehnung aller festen Körper bei Erwärmung, und zwar je nach dem Stoff verschieden; dann aber im Gegensatz zu  $M_1$  eine Verkürzung aller Körper in Richtung der Verbindungslinie zum Mittelpunkt von  $m$ , aber nicht quer zu dieser Richtung. Und zwar ist diese Verkürzung bei der gleichen Entfernung von  $m$  für alle Körper dieselbe, unabhängig vom Stoff. Wird ein (sehr langer) Stab auf Grund von  $M_2$  als Gerade festgestellt, so bleibt er bei Änderung von Ort oder

Richtung im Allgemeinen nicht gerade, sondern nimmt eine Krümmung an.

Die Krümmung der Lichtstrahlen ist hier absichtlich nicht erwähnt, weil ihre Ausmessung unter den Vorsichtsmaßregeln, die uns hier die Nichtberücksichtigung der Zeit erlauben, nicht möglich ist.

Die Frage, in welcher räumlichen Form der Tatbestand im Schwerfeld dargestellt werden soll, läuft also auf die Wahl zwischen den beiden Maßsetzungen  $M_1$  und  $M_2$  hinaus. Hier beschränken wir uns darauf, die Sachlage durch dieses Entweder-Oder zu kennzeichnen, ohne die Entscheidung in dieser nicht die Wahrheit, sondern die wissenschaftliche Zweckmäßigkeit angehenden Frage treffen zu wollen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß für die Entscheidung die früher (S. 36) genannte Regel des wissenschaftlichen Verfahrens in Betracht kommt, zahlenmäßig gleiches Verhalten der verschiedensten Körper nach Möglichkeit als scheinbar darzustellen, nämlich als Folge einer entsprechenden Eigenschaft dessen, worauf jenes Verhalten bezogen ist, hier also der Maßsetzung, des Raumgefüges. Auch sei noch einmal daran erinnert, daß wir hier den Raum aus dem Gesamtgefüge Raum-Zeit losgelöst haben; soll die Entscheidung nicht nur für diesen Ausschnitt, die räumlichen Verhältnisse, gültig sein, sondern für den Gesamtaufbau des Gefüges der Naturvorgänge; so kann sie dies nur durch Untersuchung der Frage, ob sich für das vierstufige Raum-Zeit-Gefüge aus der einen oder der andern der beiden Maßsetzungen die einfachere Form ergibt.

Wir fassen die Ergebnisse der Untersuchung des physischen Raumes kurz zusammen. Im Tatbestand der Erfahrung ist uns der dreistufige, topologische Raum  $R_{3n}''$  gegeben, dagegen nicht ein metrischer Raum. Ein solcher ergibt sich erst auf Grund einer Maßsetzung, wobei wir entweder diese selbst oder das metrische Raumgefüge frei wählen können, am besten aber so vorgehen, daß wir weder das eine noch das andre tun, sondern die Maßsetzung und das zu ihr gehörige Raumgefüge so bestimmen, daß auf Grund davon der Tatbestand möglichst einfach dargestellt werden kann.

#### IV. Das gegenseitige Verhältnis von formalem, Anschauungs- und physischem Raum.

Bei der Erörterung der verschiedenen Arten von Gefügen, die sich für jede der drei Raumbedeutungen in gleicher Weise ergeben, sind die zwischen diesen Bedeutungen bestehenden Beziehungen schon an verschiedenen Stellen deutlich geworden, sodaß wir hier den Zusammenhang nur noch einmal kurz zu überblicken brauchen.

Wir betrachten die drei Sätze:

1) Eine Zahl mit einer zweiten multipliziert ergibt das Gleiche, wie die zweite mit der ersten multipliziert.

2) 3 Gruppen zu je 4 Dingen enthalten ebensoviele Dinge, wie 4 Gruppen zu je 3 Dingen.

3) Die Anzahl dieser Kästen hier ist 3, die Anzahl der Kugeln in jedem ist 4; dort sind 4 Kästen und in jedem 3 Kugeln; folglich sind hier ebensoviele Kugeln wie dort.

Sowohl das Verhältnis von 1) zu 2), wie das von 2) zu 3) ist das einer allgemeinen Regel zu ihrer Anwendung, aber in verschiedenen Sinne: dort Einschränkung der begrifflich-allgemeinen Regel auf einen Sonderfall, dem aber noch gegenüber der Wirklichkeit Allgemeinheit zukommt; hier Anwendung dieser eingeschränkten Allgemeinheit auf einen Einzelfall der Wirklichkeit, in dem keine Allgemeinheit mehr liegt. Dieser Unterschied sei durch die Ausdrücke Einsetzung (Substitution) und Unterordnung (Subsumtion) bezeichnet, da im ersten Falle für unbestimmte Beziehungsglieder Bestimmtes eingesetzt, im zweiten das Erfahrungswirkliche der bestimmten Regel untergeordnet wird.

Mit Hilfe dieser Begriffsbestimmungen läßt sich jetzt das Verhältnis der Geometrien fassen. Zwischen der Lehre vom formalen und der vom Anschauungsraum besteht das Verhältnis der Einsetzung, zwischen dieser und der Lehre vom physischen Raum das der Unterordnung. Es gilt auch allgemein für Logik (im Sinne der Ordnungslehre), Größenlehre (nicht nur räumliche) und Physik das gleiche

dreigliedrige Verhältnis, das von grundlegender Bedeutung für die Wissenschaftslehre ist. Es entspricht (in Husserls Ausdrucksweise) dem stufenweisen Fortgange: formale Ontologie (Leibniz' ›mathesis universalis‹), regionale Ontologie, Tatsachenwissenschaft; und in der Ostwaldschen Wissenschaftslehre den ersten Stufen der Wissenschaftspyramide. Beispiele für engere Wissenschaftsgebiete, die in solchem Verhältnis zu einander stehen, sind etwa: allgemeine Beziehungslehre, allgemeine Verwandtschaftslehre, geschichtliche Geschlechterkunde; oder: allgemeine Mathetik, mathetische Farbenlehre, physikalische Farbenlehre (so von Ostwald bezeichnet und aufgebaut); so auch die Geometrien.

Dem Verhältnis der drei Wissenschaftsgebiete entspricht das Verhältnis ihrer Gegenstände, hier also des Raumes in den drei Bedeutungen  $R$ ,  $R'$ ,  $R''$ . Sowohl das Verhältnis von  $R$  zu  $R'$ , wie das von  $R'$  zu  $R''$  ist das der Gattung zum Einzelding, aber in verschiedenem Sinne. Auch hier können die Beziehungen als Einsetzung und Unterordnung bezeichnet werden, da diese beiden Ausdrücke (bezw. Substitution und Subsumtion) nicht nur in der Urteilslehre, sondern auch (in anderer, aber genau entsprechender Bedeutung) in der Klassenlehre angewandt werden. Das Verhältnis von  $R$  zu  $R'$  ist das der Gattung von Gefügen bestimmter Ordnungseigenschaften aber unbestimmter Gegenstände zu einem Gefüge dieser selben Eigenschaften, aber bestimmter Gegenstände, nämlich der anschaulich räumlichen Gebilde. Das Verhältnis von  $R'$  zu  $R''$  ist das einer Anschauungsform zu einem Gefüge dieser Form von erfahrungswirklichen Gegenständen.

Hieraus wird nun auch erkenntlich, aus welchem Grunde die verschiedenen Arten von  $R'$ , besonders die verschiedenen Unterarten von  $R'_{sm}$ , und die entsprechenden Arten von  $R$  aufgebaut werden. Zweck und Ziel dieser Aufstellungen liegt im  $R''$ . Die räumlichen Beziehungen der Erfahrung sollen in ein widerspruchloses Gefüge  $R''$  gebracht werden; für dieses wird die allgemeine Form  $R'$  vorgebaut, und für diese wiederum die noch allgemeinere begriffliche Form  $R$ . Da nun für  $R''$  sich je nach der Wahl der Maßsetzung die verschiedenen Arten des  $R'_{sm}$  als möglich erweisen, so müssen die ihnen entsprechenden Arten des  $R'$  aufgebaut werden, die dann in früher erläuteter Weise zu den umfassenden Gefügen  $R'_{nm}$  oder  $R'_{st}$  und schließlich zum  $R'_{nt}$  verallgemeinert und zugleich zusammengefaßt werden. Und für diese Gefüge werden die formalen Gerüste der entsprechenden  $R$  bis zum allgemeinsten, dem  $R_{nt}$ , aufgebaut.

## V. Die Beziehungen zwischen Raumerkenntnis und Erfahrung.

### a) Die Quellen der Erkenntnis vom Raume.

Nach dem so gewonnenen Überblick über die drei verschiedenen Bedeutungen des Raumes und die bei jeder dieser Bedeutungen vorliegenden Arten von Raumgefügen, insbesondere das topologische und das metrische Gefüge, kann die Frage nach der Abhängigkeit der Raumerkenntnis von der Erfahrung und allgemeiner nach den Quellen dieser Erkenntnis beantwortet werden.

Die Lehre vom formalen Raum bildet eine Weiterführung eines besonderen Gebietes der Beziehungslehre; ihre Sätze sind ebenso wie die der Zahlenlehre aus den Grundgesetzen der deduktiven Logik abgeleitet und von der Erfahrung gänzlich unabhängig.

Beim Anschauungsraum liegt die Sache nicht so einfach. Die Lehrsätze werden hier rein begrifflich aus gewissen Grundsätzen abgeleitet; die Frage ist also nur noch, worauf sich die Erkenntnis dieser Grundsätze gründet. Hier haben wir unterschieden zwischen den Grundsätzen im engeren Sinne und den Forderungen. Jene bilden den Befund einer bestimmten Art der ›Wesensschauung‹ (im Husserlschen Sinne) und sind daher wie alle Erkenntnisse dieser Quelle nicht auf Häufung von Erfahrungstatsachen angewiesen, daher nicht als Erfahrungserkenntnisse zu bezeichnen, aber auch nicht unabhängig von jeder Erfahrung, insofern sie an irgendwelchen Vertretern der betr. Art von Gegenständen gewonnen werden. Die Forderungen dagegen sind nicht Erkenntnisse, sondern Festsetzungen, die getroffen werden, um ein geschlossenes Gesamtgefüge ›Raum‹ aus jenen Erkenntnissen zu gewinnen, die ihrem Wesen nach auf ein nicht vollständiges Gebiet beschränkt erscheinen. Für diese Erweiterungen zum vollständigen Gefüge zeigten sich verschiedene Möglichkeiten. Der topologische Raum stellt das ihnen allen gemeinsame dar und ist deshalb als Form des in der Wesensschauung des Räumlichen Faßbaren anzusehen. Die metrischen Anschauungsräume dagegen sind auch noch von der Wahl jener Festsetzungen abhängig;

daher fehlt ihnen die dem topologischen Anschauungsraum wie allen dieser Quelle entstammenden Erkenntnissen zukommende Eigenschaft der unbedingten Gültigkeit.

Die Erkenntnis vom Gefüge des physischen Raumes ist Erfahrungserkenntnis: sie ist gegründet auf den ›Tatbestand‹ der Erfahrung und wird durch Induktion gewonnen, d. h. durch Sammlung und Verarbeitung von Erfahrungstatsachen, und kann daher auch unbedingte Gewißheit nie selbst erreichen, sondern nur sich ihr als einem Grenzwert immer weiter nähern. Auf Grund des Tatbestandes ergibt sich so die Erkenntnis des topologischen Raumes, während die Verwandlung dieses in eines der metrischen Gefüge nur durch Hinzunahme der frei wählbaren Maßsetzung möglich ist.

Wir haben bisher die Kantischen Ausdrücke der apriorischen und empirischen Erkenntnisse und der analytischen und synthetischen Urteile absichtlich vermieden, teils weil sie nicht von allen Seiten in gleicher Weise gedeutet und angewandt werden, teils auch, weil mit Hilfe der andern gegebenen Begriffsbestimmungen der Sachverhalt in unsrer Frage schärfer ausdrückbar scheint. Um aber die Stellung zu Auffassungen, die sich jener Begriffe bedienen, insbesondere zur Frage der synthetischen Urteile apriori, deutlich zu machen, sei kurz angeführt, wie sich die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen zu diesen Begriffen verhalten. Auch hier ist wieder nur die Frage nach den Grundsätzen der Raumlehre zu stellen, da die Lehrsätze aus ihnen ohne Mithilfe der Anschauung noch der Erfahrung abgeleitet werden.

Die Grundsätze über den formalen Raum sind offenbar apriori. Sie sind nicht synthetisch, sondern analytisch, da sie sich lediglich aus den logischen Grundsätzen ableiten und daher von jedem in ihnen vorkommenden Begriff eines ›Raumgebildes‹ (in dem formalen Sinne) nur das durch seine Begriffsbestimmung schon Gesetzte aussagen. Die Grundsätze des Anschauungsraumes sind gleichfalls apriori. Nach der bekannten Unterscheidung Kants zwischen dem ›der Erfahrung entspringen‹ und dem ›Anheben mit der Erfahrung‹ bedeutet dies ja nicht: ohne Erfahrung erfaßbar, sondern: ›unabhängig von der Menge der Erfahrung‹ (Driesch) und steht deshalb nicht im Widerspruch dazu, daß zu der Wesensschauung das Gegebensein von Erfahrung, entweder unmittelbar in der Wahrnehmung oder mittelbar in der Vorstellung, erforderlich ist. In diesen Grundsätzen des Anschauungsraumes haben wir die von Kant behaupteten synthetischen Sätze apriori vor uns. Dasselbe gilt aber nicht all-



gemein für die aus ihnen abgeleiteten Lehrsätze, sondern nur, soweit sie den topologischen Raum betreffen; denn diejenigen, die sich auf einen der metrischen Räume beziehen, sind nicht nur von den Grundsätzen, sondern auch von den Forderungen abhängig, auf Grund deren das vollständige Gefüge des Anschauungsraumes sich ergibt, also von Bestimmungen, die nicht Erkenntnisse apriori sind, weil überhaupt nicht Erkenntnisse, sondern Festsetzungen. Kants Behauptung ist also zwar richtig, aber nicht für den ganzen Bereich derjenigen Sätze gültig, auf die er selbst sie bezog. Schließlich sind die Sätze über den physischen Raum ebenfalls synthetisch, aber sicherlich nicht apriori, sondern a posteriori, nämlich auf Induktion beruhend.

Abgesehen von den durch wahlfreie Setzungen hinzukommenden Bestimmungen sind also die Sätze über den formalen, den physischen Raum und den der Anschauung bzw. analytische Sätze apriori, synthetische aposteriori, synthetische apriori. Die seit langer Zeit geführten Auseinandersetzungen zwischen Mathematikern, die Kants Behauptung bestritten, und Philosophen, die sie verteidigten, haben offenbar deshalb zu keinem Ergebnis führen können, weil auf beiden Seiten nicht von dem gleichen Gegenstande die Rede war. Die ersteren hatten teils den formalen Raum (z. B. Couturat), teils den physischen (Riemann, Helmholtz, Poincaré) im Auge, die letzteren den Anschauungsraum. Somit hatten beide Teile Recht und hätten sich leicht einigen können, wenn über die drei verschiedenen Bedeutungen des Raumes Klarheit geherrscht hätte.

Um anstelle der Unterscheidung apriori-aposteriori wieder auf unsre Begriffsbestimmungen zurückzugreifen, können wir die denkmäßigen (d. h. Begründung angehenden) Quellen einer Erkenntnis durch eine Formel ausdrücken, wobei durch  $W_1, S_1$  bzw.  $T_1$  ausgedrückt werden soll, daß die betr. Erkenntnis auf Wesensschauung, wahlfreier Setzung bzw. dem Tatbestande der Erfahrung beruht, und durch  $W_0, S_0$  bzw.  $T_0$ , daß die Erkenntnis frei von diesen Bestimmungen ist. Die Sätze über die verschiedenen Raumarten haben dann folgende Quellenformeln:

$$R_{nt}, R_{st}, (R_{sm}) : W_1 S_0 T_0$$

$$R_{sm} \text{ (s. u.)} : W_1 S_1 T_0$$

$$R'_{st} : W_1 S_0 T_0$$

$$R'_{nt} : W_1 S_0 T_0$$

$$R'_{sm} : W_1 S_1 T_0$$

$$R''_{st} : W_1 S_0 T_1$$

$$R''_{sm} : W_1 S_1 T_1$$

$W$  tritt überall auf, ist aber nur in den letzten Fällen eigentlich ›räumlicher‹, in den beiden ersten dagegen formaler Art (Husserl: ›formale Ontologie‹). Von  $S$  ist  $R_{sm}$  dann frei, wenn dieses Gefüge aus  $R_{st}$  abgeleitet ist und dadurch ununterbrochene Verbindung mit den logischen Grundgesetzen hat, dagegen nicht, wenn seine Grundsätze selbständig aufgestellt werden als auf frei wählbaren Festsetzungen beruhende formale Bedingungen eines Beziehungsgefüges. Daß letzteres Verfahren in der Regel angewandt wird, ist oben besprochen worden (S. 14). Daß  $R'_{st}$  frei von  $S$  ist, obwohl mit Hilfe der nach freier Wahl festgesetzten Forderungen aufgebaut, beruht darauf, daß dieses Gefüge nur diejenigen räumlichen Bestimmungen enthält, die bei jeder der verschiedenen möglichen Festsetzungen sich ergeben, also nicht abhängig von der Wahl der Festsetzungen ist.

#### b) Der Raum als Bedingung der Erfahrung.

Nach Kant ist der Raum die Bedingung zur Möglichkeit jeder (äußeren) Erfahrung überhaupt. Gilt dies für die räumlichen Bestimmungen aller von uns unterschiedenen Gefüge? Um das zu entscheiden, ist zu überlegen, welche räumlichen Bestimmungen notwendig in jeder (äußeren) Erfahrung anzutreffen sind, also auch dann, wenn diese noch nicht auf Grund der frei gewählten Bestimmungen in eine über die notwendige hinausgehende, besondere räumliche Form gebracht worden ist. Nun haben wir die Erfahrung, soweit sie nur in der eindeutigen, notwendigen Form vorliegt, die keinerlei frei gewählte Festsetzung enthält, ›Tatbestand‹ genannt. Demnach können nur die im Tatbestand enthaltenen räumlichen Bestimmungen Bedingung zur Möglichkeit der Erfahrung sein. Und das sind, wie wir gesehen haben, nur die topologischen, nicht aber die projektiven und vor allem nicht die metrischen Beziehungen.

Man hat die Umformung einer Tatbestandsaussage von einer metrischen Raumform in eine andere, z. B. von der euklidischen in eine der nichteuklidischen, treffend mit der Übersetzung eines Satzes von einer Sprache in eine andre verglichen. Wie nun der eigentliche Sinn des Satzes nicht seine Darstellung in einer dieser Sprachformen ist, wonach dann seine Darstellung in den andern Sprachen als abgeleitet und weniger ursprünglich erscheinen müßte, sondern nur das an ihm, was bei der Übersetzung unverändert bleibt; so ist auch der Sinn jener Tatbestandsaussage nicht eine ihrer metrischen Darstellungen, sondern das, was allen diesen gemeinsam ist (die

›Invarianten der topologischen Transformationen‹), und das ist eben ihre Darstellung in der bloß topologischen Form.

Bei der Behandlung dieser Frage ist häufig mit Recht darauf hingewiesen worden, daß jene ›transzendente Funktion‹ des Raumes, die Erfahrungsbegründung, nur einer eindeutigen Raumform zugeschrieben werden könne und daß daher die nichteuklidischen Raumformen hierfür nicht in Betracht kommen könnten. Aus dieser richtigen Behauptung darf aber nicht der Schluß gezogen werden, daß folglich nur der euklidische Raum jene Stelle einnehmen könne. Denn dieser Raum ist jenen nebengeordnet, und ihm kommt ebenso wenig oder ebenso viel Eindeutigkeit zu wie einem einzelnen der nicht-euklidischen Räume, etwa dem mit dem überall gleichen Krümmungsmaß — 20. Der richtige Schluß aus jenem Vordersatz kann vielmehr nur auf den topologischen Raum gehen, denn nur dieser ist sowohl jenen übergeordnet, als auch vollkommen eindeutig: der Tatbestand der Erfahrung kann nicht in mehreren verschiedenen topologischen Formen erscheinen.

Die topologischen Raumverhältnisse, die die Bedingung der Möglichkeit jedes Erfahrungsgegenstandes bilden, können nicht die des physischen Raumes sein, da dieser nicht unabhängig vom Tatbestande der Erfahrung ist, sondern den nicht notwendigen, nur wirklichen Befund zur Darstellung bringt: dieses bestimmte physisch-räumliche Gebilde steht zu jenem in einer bestimmten topologischen Beziehung (des sich Berührens, des Zusammenhangs, des Eingeschlossenseins usw.). Die Bestimmungen des topologischen Anschauungsraumes, in ihrer Erfahrungsunabhängigkeit und in der auf Grund ihrer Erkenntnisquelle ihnen zukommenden Allgemeingültigkeit, und infolgedessen auch die des formalen topologischen Raumes, jenes allgemeinen Beziehungsgefüges unbestimmter Dinge, von dem der topologische Anschauungsraum einen bestimmten Einzelfall bildet, können allein jene erfahrungstiftende Geltung haben.

Die vielumstrittene Frage, ob die Dreistufigkeit des Raumes mit zu diesen Bestimmungen gehöre, die Bedingung jedes Erfahrungsgegenstandes sind, ist zu verneinen. Wie wir beim Aufbau des Anschauungsraumes gesehen haben, stellt sich als Ergebnis der Anschauung heraus, daß die räumlichen Gebilde des Anschauungsbereiches bis zu drei Abmessungen haben. Bei der Erweiterung dieses Bereiches zum Gesamtraum zeigt sich aber, daß, wenn ein Gebilde von  $k$  Abmessungen vorliegt, zwar der Schluß möglich ist, daß das Gesamtgefüge, dem es angehört, mindestens  $k$  Abmessungen hat, aber die

obere Grenze der Zahl der Abmessungen des Gesamtgefüges nicht erschlossen werden kann. Aus jenem Anschauungsbefund folgt also nur, daß der Gesamtanschauungsraum mindestens drei Abmessungen hat. Noch weniger ist sicherlich aus der Erkenntnis des physischen Raumes, die ja keine Notwendigkeit, sondern nur Erfahrungswahrscheinlichkeit besitzt, oder aus der des formalen Raumes, für den ja offenbar die Zahl der Abmessungen nicht beschränkt ist, der Schluß möglich, daß es Bedingung zur Möglichkeit eines jeden Erfahrungsgegenstandes sei, höchstens drei Abmessungen zu haben. Auch die Auffassung, daß dieser Schluß daraus zu ziehen sei, daß nur durch die Dreistufigkeit der räumlichen Gebilde die Eindeutigkeit der Erfahrungsbestimmung gewährleistet werde, trifft nicht zu. Vielmehr ist gerade umgekehrt bei Zulassung einer oberen Grenze der Anzahl der Abmessungen die Raumbestimmung vieldeutig, entsprechend der Vielheit der Möglichkeiten solcher Grenze; und zur Vermeidung dieser Vieldeutigkeit ist die unbeschränkte Anzahl der Abmessungen als möglich zu fordern, sodaß beliebig viele Abmessungen des Erfahrungsgegenstandes mit seiner Möglichkeit als eines solchen verträglich sind.

Es ist von mathematischer und philosophischer Seite schon mehrfach dargelegt worden, daß jene Behauptung Kants über die Bedeutung des Raumes für die Erfahrung durch die Lehre von den nichteuklidischen Räumen nicht erschüttert wird, aber von dem dreistufigen, euklidischen Gefüge, das Kant allein bekannt war, auf ein allgemeineres übertragen werden muß. Auf die Frage, welches dieses nun sei, lauten die Antworten aber teils unbestimmt, indem nur einzelne Merkmale des dreistufigen, euklidischen Gefüges als verallgemeinerungsbedürftig hingestellt werden, teils widersprechend, hauptsächlich infolge Nichtunterscheidung der verschiedenen Raumbedeutungen und nicht genügender Klarheit über das begriffliche Verhältnis der Raumarten selbst, insbesondere das Verhältnis der metrischen zu dem übergeordneten topologischen. Nach den vorstehenden Überlegungen muß der Kantischen Auffassung beigeprägt werden, und zwar ist dasjenige Raumgefüge, das anstelle des von Kant gemeinten die erfahrungstiftende Bedeutung besitzt, genau anzugeben als der topologische Anschauungsraum mit unbeschränkt vielen Abmessungen ( $R'_{ni}$ ); damit werden nicht nur die Bestimmungen dieses Gefüges, sondern gleichzeitig auch die seiner Ordnungsform, des  $R_{ni}$ , zu Bedingungen der Möglichkeit eines jeden Erfahrungsgegenstandes überhaupt erklärt.

## Anhang I.

## Literatur-Verzeichnis.

1. Abhandlungen der Fries'schen Schule, N. F., Bd. I. 1904—06. Siehe [107], [108], [180].
2. Aster, E. v. Prinzipien der Erkenntnislehre. Versuch einer Neubegründung des Nominalismus. 1913.
3. Bauch, Bruno. Studien zur Philosophie der exakten Wissenschaften. 1911.
4. ——. Ueber den Begriff des Naturgesetzes. (Vortr. 1914). In: Kantstud. XIX, 303—337, 1914.
5. ——. Immanuel Kant. 1917.
6. Baumann, Joh. Jul. Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluß dargestellt und beurteilt. I, II. 1868, 69.
7. Becher, Erich. Naturphilosophie. = Kultur d. Gegenw. III, VII, 1. 1914.
8. Bergmann, Hugo. Ueber den analytischen Charakter des Existenztheorems in der reinen Mathematik. In: Ann. d. Naturphil. VIII, 495—502. 1909.
9. ——. Das Unendliche und die Zahl. 1913.
10. ——. Bertrand Russells »Erkenntnis der Außenwelt«. (Besprechung von [221]). In: Kantstud. XXV, 50—56, 1920.
11. Bernstein, Felix. Die Mengenlehre Cantors und der Finitismus. In: Jahresh. d. Math.-Ver. XXVIII, 63—78, 1919.
12. Du Bois-Reymond, Paul. Allgemeine Funktionentheorie. 1. (einz.) Teil: Metaphysik und Theorie der mathem. Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Funktion. 1882.
13. Bolyai de Bolya, Joannes. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidean, a priori haud unquam decidenda, independentem. (In dem »Tentamen« seines Vaters Wolfgang, 1832). 1903.
14. Bolzano, Bernard. Paradoxien des Unendlichen. Aus d. Nachl. hgg. v. Fr. Prihonsky. (1850) 1889.
15. Bonola, Roberto. Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. (1906). Uebers. v. H. Liebmann. 1908.
16. ——. Ueber die Parallelenlehre und über die nichteuklidischen Geometrien. In: [60] 247—363.
17. Born, Max. Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Gemeinverständlich dargestellt. = Naturw. Monogr. u. Lehrb., hgg. v. Berliner u. Pütter, III, 1920.
18. Brulez, Lucien. Delboeufs Bedeutung für die Logik. In: Kantstudien XXIV, 52—106, 1920.
19. Burkhardt, Heinrich. Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. In: Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 114—118, 1895.
20. Cantor, Georg. Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Teil 5. In: Math. Ann. XXI, 545—591, 1883. Auch S.-A. u. d. Titel: Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathem.-philos. Versuch in der Lehre des Unendlichen. 1883.
21. Cantor, Georg. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: Math. Ann. XLVI, 481—512, 1895; XLIX, 207—246, 1897.
22. Cassirer, Ernst. Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. 1902.
23. ——. Kant und die moderne Mathematik. Mit Bezug auf Russells und Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik. In: Kantstudien XII, 1—49, 1907. Ueber [31] und [218].
24. ——. Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. I (1906) 1910, II 1907.
25. ——. Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik. 1910.
26. ——. Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen. 1921.
27. Christiansen, Broder. Kritik der Kantischen Erkenntnislehre. 1911.
28. Clifford, William Kingdon. Der Sinn der exakten Wissenschaften in gemeinverständlicher Form dargestellt. Uebers. v. H. Kleinpeter. 1913.
29. Cohn, Jonas. Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. Untersuchungen über die Grundfragen der Logik. 1908.
- 29a. Cornelius, Hans. Transzendente Systematik. Untersuchungen zur Begründung der Erkenntnistheorie. 1916.
30. Couturat, Louis. La logique de Leibniz d'après des documents inédits. 1901.
31. ——. Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. (1906). Dtsch. v. C. Siegel. 1908. Vgl. hierzu [23].
32. ——. Kants Philosophie der Mathematik. Rev. d. Métaph. et Moral, 1904. Abgedr. in [31] 247—326.
33. ——. Die Prinzipien der Logik. Dtsch. v. V. Plinke. In [63] 137—201.
34. ——. L'Algèbre de la Logique. (1905) 1914.  
— s. a. [146].
- 34a. Czolbe, Heinrich. Grundzüge einer extensionalen Erkenntnistheorie. Ein räumliches Abbild von der Entstehung der sinnlichen Wahrnehmung. 1875.
35. Dedekind, Richard. Stetigkeit und irrationale Zahlen. (1872) 1912.
36. ——. Was sind und was sollen die Zahlen? (1897) 1918.
37. Dehn, Max u. Heegaard, P. Analysis situs. In: [62] 1. Tl., 153—220, 1907.
38. ——. Topologie. In: [189] 174—194. 1910.
39. Delboeuf, Jos. R. Leop. Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats. 1860. (S. die Wiedergabe des Inhalts bei Brulez [18].)
40. Dingler, Hugo. Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. 1911.
41. ——. Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik, zugleich als Einführung in die Axiomatik. 1915.
42. ——. Die Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. 1919.
43. ——. Ueber die axiomatische Grundlegung der Lehre vom Ding. In: Jahresh. d. Math.-Ver. XXVIII, 138—158, 1919.
44. ——. Ueber den Begriff der »Einfachheit« in der Methodik der Physik und der exakten Wissenschaften. In: ZS. f. Physik III, 425—436, 1920.
45. ——. Der starre Körper. In: Phys. ZS. XXI, 487—492, 1920.
46. ——. Ein Grundproblem der modernen Physik. In: Ann. d. Naturphil. XIV, 112—134, 1920.
47. ——. Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. Vortr. Naturf.-Vers. 1920. (S.-A. aus: Phys. ZS. XXI, 668—675, 1920) 1921.
- 47a. ——. Physik und Hypothese. Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre nebst einer krit. Analyse der Fundamente der Relativitätstheorie. 1921.  
— (S. auch: [48]).
48. Dittrich, Ernst. Zur Frage nach der Geometrie der Lichtstrahlen und starren Körper. In: Ann. d. Naturphil. X, 92—101, 1910. (Vgl. aber auch die Kritik v. Dingler, ebd 437—440).

49. Driesch, Hans. Naturbegriffe und Natururteile. Analytische Untersuchungen zur reinen und empirischen Naturwissenschaft. 1904.
50. —. Ordnungslehre. Ein System des nicht-metaphysischen Teiles der Philosophie. Mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Werden. 1912.
51. Einstein, Albert. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Abgedr. aus: Ann. d. Phys. XL, 1916. In: [159] 81—124. (Auch S.-A.).
52. —. Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. 1917.
53. —. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Abgedr. aus: SB. d. Akad. d. Wiss. Berlin, 1917. In: [159] 130—139.
54. —. Geometrie und Erfahrung. Erweit. Fassung d. Festvortr. Akad. d. Wiss. Berlin. 1921.
55. Engel, Friedr. Der Geschmack in der neueren Mathematik. 1890.
56. — und Stäckel, Paul. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. 1895.  
— S. a. [153].
57. Enriques, Federigo. Sulle ipotesi, che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni. In: Rend. d. Circ. Matem. Palermo, XII, 222—239, 1898.
58. —. Probleme der Wissenschaft. 2. Teil: Die Grundbegriffe der Wissenschaft. (1906). Dtsch. v. K. Grelling. 1910.
59. —. Prinzipien der Geometrie. In: [62] 1. Tl., 1—129, 1907.
60. —. Fragen der Elementargeometrie. (Aufsätze versch. Verfasser). I. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Dtsch. v. H. Thieme. 1911. S. [61], [16].
61. —. Ueber die philosophische Bedeutung der Fragen, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen. In: [60] 1—19.
62. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hsg. im Auftr. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Göttingen, Heidelberg, Leipzig, München und Wien. III. Bd.: Geometrie. 4 Tle. red. v. W. Fr. Meyer u. H. Mohrmann. S. [37], [59], [237].
63. —. Der philosophischen Wissenschaften. Hsg. v. W. Windelband und A. Ruge. I. Bd.: Logik. 1912. S. [216], [33].
64. Erdmann, Benno. Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie. 1877.
65. Euclidis elementorum libri XV. (Viele Ausg.) Dtsch. v. Joh. Fr. Lorentz. 1781 (danach viele andre Ausg.).  
— s. a. [56], [242].
66. Flamm, L. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. In: Physik. ZS. XVII, 448—454, 1916.
67. Fraenkel, Adolf. Einleitung in die Mengenlehre. Eine gemeinverständliche Einführung in das Reich der unendlichen Größen. 1919.
- 67a. Frege, Gottlob. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. 1879.
68. —. Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. 1884.
69. —. Funktion und Begriff. 1891.
70. —. Ueber Begriff und Gegenstand. In: Viert. f. wiss. Philos. XVI, 192—205, 1892.
71. —. Grundgesetze der Arithmetik. I, II. 1893, 1903.
72. —. Ueber die Zahlen des Herrn H. Schubert. 1899.
73. —. Ueber die Grundlagen der Geometrie. In: Jahresber. Mathem.-Ver. XII, 319—324, 368—375, 1903.
74. Freundlich, Erwin. Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. (1916) 1920.
75. Gättschenberger, Richard. Symbola. Anfangsgründe einer Erkenntnistheorie. 1920.
76. Gauß, Carl Friedr. Werke. Hsgg. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen. Bd. VIII. 1900.

77. Gauß, Carl Friedr. Besprechungen und Briefe über die Parallelenlehre. 1799—1846. In: [56] 219—236.
78. Geiringer, Hilda. Nichteuklidische Geometrie und Raumproblem. In: Die Naturwiss. VI, 635—641, 653—658, 1918.
79. Geißler, Kurt. Die geometrischen Grundvorstellungen und Grundsätze und ihr Zusammenhang. In: Jahresber. d. Math.-Ver. XII, 265—288, 1903.
80. —. Moderne Verirrungen auf philosophisch-mathematischen Gebieten. Kritische und selbstgebende Untersuchungen. 1909.
81. Gerstel, Adolf. Ueber die Axiome der Geometrie. Vortr. In: Beil. z. 16. Jahresber. d. Philos. Ges. Wien, 97—111, 1903.
82. Geysler, Jos. Allgemeine Philosophie des Seins und der Natur. 1915.
83. Gmeiner, J. A. s. [247], [248].
84. Graßmann, Hermann. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Dargestellt und durch Anwendung auf die übrigen Zweige der Mathematik . . . erläutert. (1844) 1878. (Auch als Ges. Werke, I, 1. 1894). Vgl. [222].
85. —. Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Gekr. Preisschr. Mit einer erläuternden Abhandl. v. A. F. Möbius. 1847.
86. —. Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. 1862. (Auch in: Ges. Werke I, 2. 1894).
87. — Hermann, jr. Punktrechnung und projektive Geometrie. Festschr. u. Progr. d. Latina, Halle. 1894, 96, 98.
88. — Robert. Die Wissenslehre oder die Philosophie. 1. Teil, 2. Hälfte: Die Denklehre. 1890.
89. —. Formelbuch der Denklehre. 1890.
90. —. Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Größen in strenger Formelentwicklung. (1891) 1904.
91. Haas, Arthur. Die Physik als geometrische Notwendigkeit. In: Die Naturwiss. VIII, 121—127, 1920.
92. Hankel, Hermann. Vorles. über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. 1. Teil: Theorie der komplexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen komplexen Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen, nebst ihrer geometr. Darstellung. 1867.
93. Hartmann, Eduard. A. Einsteins allgemeine Relativitätstheorie. In: Philos. Jahrb. (Gutberlet) XXX, 363—387, 1917.
94. — Nicolai. Ueber die Erkennbarkeit des Apriorischen. In: Logos V, 290—329, 1915.
95. Hausdorff, Felix. Das Raumproblem. Antr.-Vorles. In: Ann. d. Naturphil. III, 1—23, 1904.
96. — Grundzüge der Mengenlehre. 1914.  
Heegaard, P. S. [37].
97. Helmholtz, Hermann von. Ueber die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen. In: Gött. gel. Nachr. 1868, 193—221.
98. —. Vorträge und Reden. Bd. II. 1903. S. [99], [101]—[103].
99. —. Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vortr. (1870). In: [98] 1—31. (Ausführlichere und leicht verständliche Darstellung von [97]).
100. —. Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Hr. Prof. Land. (Orig.-Text für »Mind« III, 212—224, 1878). In: Wissensch. Abhandl. II, 640—660, 1883. (Verarbeitet in [101] u. [103]).
101. —. Die Tatsachen in der Wahrnehmung. (1878). In: [98] 213—247.
102. —. Der Raum kann transzendental sein, ohne daß es die Axiome sind. Beilage II zu [101]. In: [98] 391—393.
103. —. Die Anwendbarkeit der Axiome auf die physische Welt. Beilage III zu [101]. In: [98] 394—406.
104. Henry, Viktor. Das erkenntnistheoretische Raumproblem in seinem gegenwärtigen Stande. Erg.-H. 34 der Kantstudien. 1915.
105. Herbart, Richard. Die Philosophie des Raumes. Vortr. 1912.

106. Hessenberg, Gerhard. Ueber die kritische Mathematik. In: Sitz.-Ber. d. Berliner math. Ges. III, 21—28, 1904. = Beil. z.: Arch. f. Math. u. Phys., 3. R., VII, VIII.
107. — —. Das Unendliche in der Mathematik. In: [1] 185—190, 1904.
108. — —. Grundbegriffe der Mengenlehre. In: [1] 487—706, 1906.
109. Heymans, Gerard. Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens. Ein Lehrbuch der Erkenntnistheorie in Grundzügen. (1890) 1915.
110. Hilbert, David. Grundlagen der Geometrie. (Ursprüngl. in: Festschr. z. Gauß-Weber-Denk., 1—92, 1899) 1913.
111. — —. Ueber den Zahlbegriff. (Abgedr. aus: JB. d. Math.-Ver. VIII, 1900) in: [110] Anh. VI.
112. — —. Ueber die Grundlagen der Logik und Arithmetik. (Abgedr. aus: Verh. III. Int. Math. Kongr. Heidelbg. 1904) in [110] Anh. VII.
113. Hölder, Otto. Anschauung und Denken in der Geometrie. Antr.-Vorles. 1900.
114. Hönigswald, Richard. Ueber den Unterschied und die Beziehungen der logischen und der erkenntnistheoretischen Elemente in dem kritischen Problem der Geometrie. In [142] 887—893.
115. — —. Zum Streit über die Grundlagen der Mathematik. Eine erkenntnistheoretische Studie. 1912.
- 115a. — —. Naturphilosophie. In: Jahrb. d. Philos. I, 60—98, 1913.
116. Husserl, Edmund. Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen. I. (einz.) Bd. 1891.
117. — —. Der Folgerungscalcul und die Inhaltslogik. In: Viert. f. wiss. Philos. XV, 168—189, u. Nachtr. 351—356, 1891.
118. — —. Logische Untersuchungen. I. Bd.: Prolegomena zur reinen Logik. (1900) 1913.
119. — —. Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. I. (bish. einz.) Buch: Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie. 1913. (S.-A. aus: JB. f. Philos. u. phänomenol. Forschung I).
120. Isenkrathe, Caspar. Das Endliche und das Unendliche. Schärfung beider Begriffe, Erörterung vielfacher Streitfragen und Beweisführungen, in denen sie Anwendung finden. 1915.
121. — —. Untersuchungen über das Endliche und das Unendliche mit Ausblick auf die philos. Apologetik. I. (bish. einz.) Heft. 1920.
122. — —. Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie. Einleitung und Vorstufen. 1921.
123. Jakowenko, Boris. Die Logistik und die transzendente Begründung der Mathematik. In [142] 868—885.
124. Kant, Immanuel. Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte. 1747.
125. — —. Kritik der reinen Vernunft. 1781. 1787. (zitiert nach d. Ausg. v. K. Kehrbach, 1878).
126. — —. Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft auftreten können. 1783.  
— —. s. a. [5], [32].
127. Kerry, B. System einer Theorie der Grenzbegriffe. Ein Beitrag zur Erkenntnistheorie. 1890.
128. Killing, Wilhelm. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen. In: Jahresb. Gymn. Brilon. 1883.
- 128a. — —. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. 1885.
- 128b. — —. Ueber die Grundlagen der Geometrie. In: Journ. f. r. u. angew. Math. CIX, 121—186, 1892.
129. — —. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. I, II. 1893, 98.
130. Kirschmann, A. Die Dimensionen des Raumes. In: Phil. Stud. (Wundt) XIX = Festschr. F. W. Wundt, 1. Teil, 310—417, 1902.

131. Klein, Felix. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. 1872. (Auch in: Math. Ann. XLIII, 63 ff., 1893).
132. — —. Ueber die sog. nichteuklidische Geometrie. In: Math. Ann. IV, 573—625, 1871; VI, 112—145, 1873; VII, 531—537, 1874; XXXVII, 544—572, 1890.
133. — —. Nichteuklidische Geometrie. Vorles. I, II. 1893.
- 133a. — —. Ueber Arithmetisierung der Mathematik. Vortr. In: Göttinger Nachr., gesch. Mitt., 82—91, 1895.
134. — —. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien. Vorles. 1902.
135. — —. Zwei Besprechungen über Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. In: Philos. Ges. Wien, 1906.
136. — —. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. I: Arithmetik, Algebra, Analysis. (1908) 1911. II: Geometrie. (1908) 1914.
137. Kleinpeter, Hans. Die Entwicklung des Raum- und Zeitbegriffes in der neueren Mathematik und Mechanik und seine Bedeutung für die Erkenntnistheorie. In: Arch. f. syst. Philos. IV, 32—43, 1898.
138. — —. Die Erkenntnistheorie der Naturforschung der Gegenwart. Unter Zugrundelegung der Anschauungen von Mach, Stallo, Clifford, Kirchhoff, Hertz, Pearson und Ostwald. 1905.
139. Kneser, Adolf. Mathematik und Natur. Rektoratsrede. (1911) 1913.
140. König, Edmund. Kant und die Naturwissenschaft. 1907. = Die Wissensch., H. 22.
141. — —, Julius. Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. 1914.
142. (Kongreß), Bericht üb. d. III. internat. K. f. Philosophie zu Heidelberg 1908. Hsgg. v. Th. Eisenhans. 1909. S.: [114], [123].
143. Korselt, A. Ueber die Grundlagen der Geometrie. In: Jahresber. Math.-Ver. XII, 402—407, 1903.
144. Leibniz, Gottfried Wilhelm. Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. Uebers. v. A. Buchenau. Hsg. m. Einleit. u. Erläut. v. E. Cassirer. Bd. I (zur Logik und Mathematik) 1903.
145. — —. Ges. Werke. Hsg. v. G. H. Pertz. 3. Folge: mathemat. Schriften, hsg. v. C. I. Gerhardt. I—VII, bes. V u. VII. 1849—63. (Viele Zitate hieraus und aus den philos. Schriften sind übersetzt in [6] II, 1—345).
146. — —. Opusculs et fragments inédits. Extraits des manusc. de la bibl. roy. de Hanovre. Par L. Couturat. 1903.
147. — —. Dissertatio de arte combinatoria. 1666. In [145] V, 7—79.
148. — —. Characteristica geometrica. 1679. In: [145] V, 141—171.
149. — —. Analysis geometrica propria. 1698. In: [145] V, 172—178.
150. — —. De analysi situs. In: [145] V, 178—183. Dtsch. in: [144] 69—76.
151. — —. Mathesis universalis. In: [145] VII, 49—76.
152. — —. Initia rerum mathematicarum metaphysica. In [145] VII, 17—29.  
— —. s. a.: [22], [30].
153. Lie, Sophus (und Engel, Friedr.). Theorie der Transformationsgruppen. Bd. III, Abt. V: Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, 393—543. 1893.
154. Liebmann, Heinrich. Nichteuklidische Geometrie. (1905) 1912.
155. — —, Otto. Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie. 4. A. 1911.
156. Lipps, Gottl. Friedr. Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. In: Wundts Philos. Stud. IX, 151 u. 354, 1893; X, 169—202, 1894; XI, 254—306, 1895; XIV, 157—241, 1898.
157. Lobatschewskij, Nikolaj Iw. Zwei geometrische Abhandlungen, hsg. v. Fr. Engel, 1899. Darin: 1) Ueber die Anfangsgründe der Geometrie. 1830. 2) Neue Anfangsgründe der Geometrie. 1835—38.
158. — —. Pangeometrie. 1856. Uebers. v. H. Liebmann, (1902) 1912. = Ostw. Klass., Bd. 130.
159. (Lorentz-Einstein-Minkowski), Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung v. Abhandlungen. = Fortschr. d. math. Wiss. in Monogr., H. 2. (1913) 1920. S. [51], [53], [168].

160. Lotze, Hermann. Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie. (1879) 1884.
161. Mach, Ernst. Die Analyse der Empfindungen und das Verhältnis des Physischen zum Psychischen. (1886) 1919.
162. — —. Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung. (1905) 1920.
163. Mally, Ernst. Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik. 1912.
164. Medicus, Fritz. Kants transzendente Aesthetik und die nichteuclidische Geometrie. Diss. 1898. (Auch in: Kantstud. III, 3).
165. — —. Bemerkungen zum Problem der Existenz mathematischer Gegenstände. In: Kantstud. XIX, 1—18, 1914 (= Riehlfestschr.).
166. Meinong, Alexius. Ueber die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften. 1907.
167. Mill, John Stuart. System der deduktiven und induktiven Logik. Eine Darlegung der Prinzipien wissenschaftlicher Forschung, insbesondere der Naturforschung. 1843. Dtsch. v. J. Schiel. 2 Bde. 2. A. 1862, 63.
168. Minkowski, Hermann. Raum und Zeit. Vortr. 1908. (Abgedr. aus: JB. d. Math.-Ver. XVIII, 1909) in: [259] 54—66, mit Anm. v. A. Sommerfeld [159] 67—71.
169. Möbius, A. F. Die Grassmannsche Lehre von Punktgrößen und den davon abhängenden Größenformen. In [85], 1847.
170. Mollerup, J. Grundlagen der Elementargeometrie. In [189] 4—25.
171. — —. Die nichteuclidische Geometrie. In [189] 505—534.
172. Müller, Aloys. Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem. 1911.
173. — —. Die Fiktion in der Mathematik und der Physik. In: Naturwiss. V, 341—347, 362—366, 1917.
174. — —, Emil. Ueber mehrdimensionale Räume. Vortr. In: Beil. z. 17. Jahresber. d. Philos. Ges. Wien, 1—14, 1904.
175. Natorp, Paul. Nombre, temps et espace dans leur rapports avec les fonctions primitives de la pensée. Essai de deduction. In: Bibl. d. Congr. Int. d. Philos., I: Philos. générale et Métaphysique, 343—389, 1900.
176. — —. Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik. In: Arch. f. syst. Philos. VII, 177—209, 372—438, 1901.
177. — —. Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik. In: Unterr.-Bl. f. Math. u. Nat. VIII, 2—8, 1902.
178. — —. Logik (Grundlegung und logischer Aufbau der Mathematik und mathemat. Naturwissenschaft) in Leitsätzen zu akad. Vorles. (1904) 1910.
179. — —. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. 1910.
180. Nelson, Leonard. Bemerkungen über die nichteuclidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. In: [1] 373—430, 1905.
181. — —. Des fondements de la géométrie. Vortr. 1914. In: Nelson, Die Reformation der Philosophie durch die Kritik der Vernunft, 87—118. 1918.
- 181a. Newton, Isaac. Philosophiae naturalis principia mathematica. 1686. Deutsche Ausg.: J. Ph. Wolfers, 1872.
182. Orthner, Rudolf. Entwurf einer Theorie der physikalischen Abhängigkeit. 1919.
183. Ostwald, Wilhelm. Zur Theorie der Wissenschaft. Vortr. In: Ann. d. Naturphil. IV, 1—27, 1905.
184. — —. Grundriß der Naturphilosophie. 1908.
185. — —. Moderne Naturphilosophie. I. (bish. einz.) Bd.: Die Ordnungswissenschaften. 1914.
186. — —. Das System der Wissenschaften. Als Einführung zu: Die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen, hsg. v. C. Thesing, in Bd. I: L. Graetz, Die Physik, S. IX—XXII, 1917.
187. — —. Die Farbenlehre. In fünf Büchern. I: Mathetische Farbenlehre. 1918.

188. Palágyi, Melchior. Neue Theorie des Raumes und der Zeit. Die Grundbegriffe einer Metageometrie. 1901.
189. Pascal, Ernst. Repertorium der höheren Mathematik. Dtsch. Ausg., hsg. v. P. Epstein u. H. E. Timerding. II. Bd.: Geometrie. 1. Teil. 1910. S. [38], [170], [171].
190. Pasch, Moritz. Vorlesungen über neuere Geometrie. (1882) 1912.
191. — —. Grundfragen der Geometrie. In: Journ. f. r. u. ang. Math. CXLVII, 184—190, 1917.
192. — —. Mathematik und Logik. 1919. IV: Der Aufbau der Geometrie.
193. Peano, Giuseppe. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. 1888.
194. — —. Die Grundzüge des geometrischen Calculs. Dtsch. v. A. Schepp. 1891.
195. — —. I principii di geometria logicamente esposti. 1889.
196. — —. Arithmetices principia nova methodo exposita. 1889.
197. — —. Formulaire de Mathématiques. Bd. II. 1897—99.
198. Petzoldt, Joseph. Das Weltproblem vom Standpunkte des relativistischen Positivismus aus. 1912.
199. — —. Die Relativitätstheorie im erkenntnistheoretischen Zusammenhang des relativistischen Positivismus. In: Verh. Phys. Ges. XIV, 1055—64, 1912.
200. — —. Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit. 1920.
201. Pieri, Mario. I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. In: Mem. Accad. di Torino, XLVIII, 1898.
202. Pietzker, Friedr. Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. 1891.
203. — —. Die dreifache Ausdehnung des Raumes. In: Unterr.-Bl. f. Math. u. Nat. VIII, 39—41, 1902.
204. Poincaré, Henry. Wissenschaft und Hypothese. Dtsch. v. F. u. L. Lindemann. 1906.
205. — —. Der Wert der Wissenschaft. Dtsch. v. E. Weber, mit Zusätzen v. H. Weber. (1906) 1910.
206. — —. Wissenschaft und Methode. Dtsch. m. erläut. Anm. v. F. u. L. Lindemann. 1914.
207. — —. Letzte Gedanken. Dtsch. v. K. Lichtecker. 1913.
208. — —, L. Die moderne Physik. Dtsch. v. M. u. B. Brahn. 1908.
209. Reichenbach, Hans. Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori. 1920.
210. Reye, Th. Die Geometrie der Lage (1866, 67), 3 Tle. 1886—92.
211. Rickert, Heinr. Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs. In: Logos II, 26—78, 1912.
212. Riehl, Alois. Der philosophische Kritizismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft. Bd. II, 1. Die sinnlichen und logischen Grundlagen der Erkenntnis. 1879.
213. Riemann, Bernhard. Ges. mathem. Werke und wissenschaft. Nachlass. Hsg. v. H. Weber. (1876) 1892. S. [214], [215].
214. — —. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe. (Diss. Gött. 1851) Abgedr. in: [213] 3—45.
215. — —. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Hab.-Schr. (Abh. d. Ges. d. Wiss. Gött. XIII, 1854; auch in: [213] 254—269). Neu hsg. u. erläutert. v. H. Weyl. 1919.
216. Royce, Josiah. Prinzipien der Logik. Dtsch. v. E. Schweitzer. In: [63] 61—136.
217. Russell, Bertrand A. W. An essay on the foundations of geometry. 1897.
218. — —. The principles of mathematics. I. 1903. Vgl. hierzu [23].
- —. Principia mathematica, s. [270].
219. — —. Mathematical logic as based on the theory of types. In: Amer. Journ. of Math. XXX, 222—262, 1908.
220. — —. The problems of philosophy. = Home university libr. of mod. knowl., Bd. 40. (etwa 1912).

221. Russell, Bertrand. Our knowledge of the external world as a field for scientific method in philosophy. 1914. Vgl. [10].
222. Schlegel, Viktor. Die Graßmannsche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. (S.-A. aus: ZS. f. Math. u. Phys. XL). 1896.
223. Schlick, Moritz. Allgemeine Erkenntnislehre. = Naturw. Monogr. u. Lehrb., hsgg. v. Berliner u. Pütter, Bd. I. 1918.
224. — —. Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. (1917) 1920.
225. Schmied-Kowarzik, Walther. Raumanschauung und Zeitanschauung. (S.-A. aus: Arch. f. d. ges. Psych. XVIII, S. 94) 1910.
226. Schmitz-Dumont, O. Zeit und Raum in ihren denknöwendigen Bestimmungen abgeleitet aus dem Satze des Widerspruches. 1875.
227. — —. Naturphilosophie als exakte Wissenschaft. Mit bes. Berücks. der mathem. Physik. 1895.
228. Schoenflies, Arthur. Mengenlehre. In [62], Bd. I A, 184—207, 1898.
229. — —. Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. 1. Hälfte: Allg. Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen. 1913. (= Umarbtg. d. 1. Tls. v. [230]).
230. — —. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2. Teil. = Jahresber. Math.-Ver., Erg.-Bd. II. 1908.
231. Schröder, Ernst. Der Operationskreis des Logikkalküls. 1877.
232. — —. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bde. 1890—95.
233. — —. Abriß der Algebra der Logik. Bearb. v. E. Müller. 2 Tle. 1909, 10.
234. Schultz, Jul. Bemerkungen zur Psychologie der Axiome. Beil. z. Jahr.-Ber. d. Soph.-Realg. Berlin. 1897.
235. Schur, Friedr. Grundlagen d. Geometrie. 1909.
236. Schwarzschild, Karl. Ueber das zulässige Krümmungsmaß des Raumes. In: Viert.-Schr. d. astr. Ges. XXXV, 337—347, 1900.
237. Segre, G. Mehrdimensionale Räume. In [63] 2. Teil, 769—972, 1921 (abgeschl. 1912).
238. Sellien, Ew. Die erkenntnistheoretische Bedeutung der Relativitätstheorie. Erg.-H. 48 der Kantstudien, 1919.
239. Siegel, Carl. Geschichte der deutschen Naturphilosophie. 1913.
240. Sigwart, Christoph. Logik. Bd. II: Die Methodenlehre. (1878) 1893.
241. Simon, Max. Zu den Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie. In: Progr. Lyc. Straßb. 1891.
242. — —. Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. 1901.
243. Stäckel, P. und Engel, Fr. s. [56].
244. Stallo, J. W. Die Begriffe und Theorien der modernen Physik. Uebers. v. H. Kleinpeter; Vorw. v. E. Mach. (1901) 1911.
245. Staudt, G. K. Chr. v. Geometrie der Lage. 1847.
246. Steiner, Jacob. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. 1832. = Ostw. Klass., Bd. 82, 83. 1896, 97.
247. Sterneck, Robert von. Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Psychologische Untersuchungen. 1907.
248. Stolz, Otto, und Gmeiner, J. A. Theoretische Arithmetik. (1902). I. Bd.: Allgemeines. Die Lehre von den Rationalzahlen. 1911.
249. — —. Dass., II. Bd.: Die Lehre von den reellen und von den komplexen Zahlen. 1915.
250. Study, E. Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. Geometrie, Anschauung und Erfahrung. = D. Wissensch., Bd. 54. 1914.
251. Tietze, Heinr. Ueber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. S.-A. aus: Mon.-H. f. Math. u. Phys. XIX, 1908.
252. Tobias, Wilh. Grenzen der Philosophie, constatiert gegen Riemann und Helmholtz, verteidigt gegen Hartmann und Lasker. 1875.
253. Vahlen, Karl Theod. Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklid. Geometrie. 1905.

253. Veblen, Oswald, u. Young, John Wesley. A set of assumptions for projective geometry. In: Amer. Journ. of Math. XXX, 347—380, 1908.
254. Veronese, Giuseppe. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Dtsch. v. Schepp. 1894.
255. Volkmann, Paul. Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. (1896) 1910.
256. Voss, Anrel. Ueber das Wesen der Mathematik. (1908) 1913.
257. Weber, Heinr., und Wellstein, Jos. Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Bd. I: Weber, Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. (1903) 1906.
258. Weierstraß, Karl. Zur Theorie der aus  $n$  Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. In: Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 395—419, 1884.
259. Weinstein, Max B. Die Grundgesetze der Natur und die modernen Naturlehren. 1911.
260. Wellstein, Joseph. Grundlagen der Geometrie. In: Elemente der Geometrie = [257] II. (1905) 1907.
261. Wernicke, Alex. Die Grundlage der euklidischen Geometrie des Maßes. Beil. z. Progr. Braunsch. 1887.
262. — —. Mathematik und philosophische Propädeutik. = Abh. üb. d. math. Unterr. i. Dtschl., hsg. v. F. Klein, Bd. III, H. 7. 1912.
263. Weyl, Hermann. Ueber die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe. Hab.-Votr. In: Math.-Naturw. Bl. VII, 93—95, 109—113, 1910.
264. — —. Raum-Zeit-Materie. Vorles. über allgemeine Relativitätstheorie. (1918) 1919.
265. — —. Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. 1918.
266. — —. Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis. In: JB. d. Math.-Ver. XXVIII, 85—92, 1919.
267. — —. Erläuterungen zu Riemann [215]. 1919.
268. Whitehead, Alfred North. A treatise on universal algebra with applications. I. 1898.
269. — —. The axioms of projective geometry. = Cambridge tracts in mathem. a. math. physics, IV. 1906.
270. — —, and Russell, Bertr. Principia Mathematica. I—III. 1910—13.
271. Wien, Wilh. Physik und Erkenntnistheorie. In: Vorträge über die neuere Entwicklung der Physik und ihrer Anwendungen. 1919.
272. Wundt, Wilh. Ueber die mathematische Induktion. In: Philosoph. Studien, I, 90—147. 1883.
273. — —. Logik. Eine Untersuchung der Prinzipien der Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Bd. I: Allg. Logik und Erkenntnistheorie. (1879) 1919.
274. Young, J. W. S. [253].
275. Zermelo, E. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. In: Math. Ann. LXV, 261—281, 1908.
276. Ziehen, Theodor. Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre. = Philos. Votr. d. Kantges., H. 16. 1917.

## Anhang II.

## Literatur-Hinweise.

»[50] 200« bedeutet: Seite 200 in Nr. 50 des vorstehenden Literatur-Verzeichnisses.

## I. Der formale Raum.

(Zu Seite 7). Allgemeines. Die Behandlung des formalen Raumes geht ursprünglich auf Leibniz zurück: [147], [149], [152], s. a. [146], vgl. [6] II 93 ff., [22] 105 ff. Die formale Geometrie galt Leibniz als Sonderfall der von ihm geplanten »mathesis universalis«, einer allgemeinen Lehre, die das Formgesetz jeder inhaltlich besondern Lehre darstellt: [151], vgl. Couturat [30] 283—322, 388—430, Husserl [118] 219 ff., 247 ff. und Cassirer [24] II 60 ff., [25] 120 ff. Wesentliche Schritte zu diesem Ziel sind aber erst in den letzten Jahrzehnten gemacht worden, durch Aufbau der formalen Beziehungs- oder Ordnungslehre mittels eines dem mathematischen nachgebildeten Verfahrens, s. Royce [216] 136, Gättschenberger [75] 110—128. Vgl. hierzu die folgenden Werke und die zu den einzelnen untenstehenden Punkten genannten.

Eine gute Uebersicht gibt vor allem Couturat [31], der über die Arbeiten von Russell [218], Whitehead [268] u. a. berichtet; noch kürzer die Besprechung der Hauptfragen aus [31] und [218] bei Cassirer [23]. Whitehead u. Russell [270] ist das grundlegendste Werk über den Aufbau der formalen Logik, Beziehungs-, Reihen-, Zahlen und Größenlehre; Bd. IV über Geometrie noch nicht erschienen. Das Werk ist anscheinend in Deutschland weit weniger bekannt als die älteren [218] u. [268], auf deren Vorarbeit es aufgebaut ist; doch bleibt daneben [268] wegen der ausführlichen Anwendungen auf Geometrie und Mechanik, und vor allem [218] wegen seiner grundsätzlichen, logischen Erörterungen wichtig. [31], [218] und [270] sind auch zu allen folgenden Abschnitten über den formalen Raum in erster Linie heranzuziehen.

Hilbert [110] kann als Behandlung des formalen Raumes gelten; so aufgefaßt in [25] 123, [40] 6, [260] 116; siehe jedoch auch unter II, Ansch.-Raum. Ueber die Unterscheidung der beiden Gesichtspunkte vgl. die Kritik von Frege [73].

Graßmann [84], [85], [86], dazu [169], [222], [30] 529 ff., Riemann [215], Vahlen [252], Peano [193], [194], [195], Whitehead [269], Veronese [254], Wellstein [260] 33—123, Husserl [118] 248 ff., Cassirer [23] 27 ff., [25] 88—132, Schlick [223] 30 ff. Ferner: [232], [96] 209 ff., [88] 100—368, [89], [175] 377 ff., [176], [177], [73], [143], [174], [263], [262] 64 ff., [219], [55] 8 ff., 18 ff., [182] 13—40, 127—147, [198] 195, [106] 23.

Ueber die Zurückführung von Arithmetik und Geometrie auf Logik und Beziehungslehre vgl. aber auch die kritischen Bemerkungen: Jakowenko [123], Poincaré [206] 128—180 u. d. Anm. v. Lindemann dazu, [205] 8—25, Klein [136] II 405 f., Geißler [80], Aster [2] 252 ff.

(Zu allen folgenden Abschn. des Kap. I auch [31] [218] u. [270]).

(S. 9). Urteile. Couturat [34], [33] 139—158, Schröder [231], [232] II, [233], Peano [193] 7 ff., [197] § 1, Cohn [29] 48 ff., 53, Mally [163].

(S. 9). Begriffe. Unsrer Ableitung in Anlehnung an Frege [71] I 8, [69], [70], auch [73]; s. a. Bauch [4]. Unsrer Begriffslehre entspricht daher der »Klassenlehre«: Couturat [34], [33] 158—162, Schröder [233], Peano [197] § 1, Mally [163] 3 ff., Royce [216] 104 ff., König [141] 33 ff., Russell [219] 249 ff.

Hier ist nur die eine Seite des Begriffes, nämlich seine Umfangsfunktion, verwendet. Diese Klassenlehre muß daher ihre notwendige Ergänzung entweder in der schon weit ausgebildeten Urteilslehre (s. o.) oder auch in einer besonderen Lehre vom Begriffsinhalt, d. h. von den Gegenstandsbestimmungen, finden; vgl. hierzu z. B. Husserl [117], Mally [163] 77, Dingler [43], Gättschenberger [75] 110 ff.; aber auch: Couturat [30] 387.

(S. 10). Beziehungen. Schröder [232] III, [233], Frege [71] I 8, Couturat [33] 172—182, Royce [216] 95 ff., Russell [221] 47 ff., [219] 251 ff., Cassirer [23] 4—10, [25] 48 ff., Cohn [29] 119 ff., 125 ff., Ostwald [185] 250 ff., [184] 70—95, Dingler [41] 7 ff., Gättschenberger [75] 43, 114 ff.

(S. 12). Anzahl. Dedekind [36], Frege [71] I, bes. 57 ff., [72], [68], Schröder [232] I, Couturat [33] 180, Russell [219] 256 ff., Hausdorff [96] 45 ff., Klein [136] I 26 ff., Weber [257] 3 ff., Kerry [127] 38 ff., Voss [256] 33 ff. — Natorp [179] 103 ff., [178] 131 ff., Cassirer [25] 53 ff., Cohn [29] 158 ff., Driesch [50] 95 ff.

Zur Kritik vgl.: Husserl [116] 103—137, Weyl [263].

Ableitung nicht aus der Beziehungslehre, sondern aus eigenen Grundsätzen: Stolz [247] 14 ff., Peano [196], [197] § 2, Hilbert [111], [112].

(S. 12). Reihen. Frege [67a] 55 ff., [71] 59 ff., Veronese [254] 19 ff., Kerry [127] 22 ff., Russell [219] 259. — Natorp [179] 98 ff., [175] 354 ff., Cassirer [25] 49 ff., König [141] 45 ff., Royce [216] 111 ff., Ostwald [185] 265 ff.

(S. 12). Ordnungszahlen. Frege [71], Hausdorff [96] 73 ff., Kerry [127] 70 ff. — Natorp [179] 103 ff., Cassirer [25] 50 ff., König [141] 248 ff.

Kritik der rein logischen Ableitung der Zahlenlehre: Rickert [211], Nelson [180] 413 ff., Hartmann [94].

(S. 12 ff.). Mengenlehre. Begründet von Cantor [20], [21]. Umfassende Zusammenstellung: Schoenflies [229], [230]; das beste Lehrbuch: Hausdorff [96]; besondere Berücksichtigung logischer Fragen: Hessenberg [108], Fraenkel [67], Couturat [31] 231—240. Vgl. auch: Schoenflies [228], Klein [136] I 548 ff., Voß [256] 65 ff., Cassirer [23] 21 ff., [25] 55 ff., König [141].

Krit. Bemerkungen. Natorp [179] 165 ff., Weyl [263], [265], Ziehen [275], Geißler [80] 96 ff., Cohn [29] 188 ff., Bergmann [9]. Vgl. dazu aber auch: Bernstein [11]. Ueber die sog. Paradoxien und ihre Lösung: Russell [219], Zermelo [274].

(S. 13). Stetigkeit, Kontinuum, (irrationale Zahlen). Dedekind [35], Cantor [20] § 9, 10, [21] 510 ff., Frege [71] II, Bolzano [14] 72 ff., Du Bois-Re. [12] 178 ff., Stolz [248] 19 ff., 46 ff., Kerry [127] 135 ff., Klein [136] I 77 ff., 557 ff., [134] 234 ff., Veronese [254] 132 ff., Peano [197] § 3, 94, Voß [256] 42 ff. — Hessenberg [107] 177 ff., [108] 531 ff., Hausdorff [96] 90 ff., Fraenkel [67] 30 ff., Weber [257] 74 ff., Russell [221] 127—152. — Cassirer [23] 12 ff., [25] 73 ff., Herberich [105] 16 ff., Henry [104] 57 ff.

Zur Kritik der formalen Ableitung der Stetigkeit: Weyl [265], [266], Natorp [179] 172—193, [178] 38 ff., Driesch [50] 102 ff., Cohn [29] 255 ff., Isenkrahe [120] 99 ff., [121], Schmied-Kowarzik [225] 111 ff., Sigwart [240] § 66, 15, Hankel [92] 46, 59, Bergmann [9] 78 ff., Wernicke [262] 66 ff., Henry [104] 64 ff., Schmitz-Dumont [227] 116 f.

(S. 13). Mehrstufige Zahlengefüge: Weierstraß [258]. Der Raum als Gefüge komplexer Zahlen: Riemann [214], Hankel [92] 99 ff., Stolz [248] 277 ff., Burkhardt [19], Wellstein [260] 83 ff., Couturat [31] 141 ff., Natorp [175] 377, [177], Hilbert [110] 34 ff. — Vgl. aber auch: Cohn [29] 212 ff., Stallo [243] 256 ff., Wundt [273] 513 f., Geißler [80] 55 ff.

(S. 14).  $R_{nt}$  (vgl. auch unter: II, Begriff d. Topologie, S. 82): Riemann [215], Tietze [250], R. Graßmann [90] (aber nicht: H. Graßmann [84]). Hierzu die Lehre von den Punktmengen: Schoenflies [229], [230], Hausdorff [96] 209 ff.



$R_{np}$  (vgl. auch unter II: Begriff d. proj. Geom., S. 81): Pieri [158].  $R_{nm}$ : Hausdorff [72] 287.

(S. 14 ff.).  $R_{n1}$ : Enriques [57].  $R_{2p}$ : Veblen [253], Wellstein [205] 153 ff., Whitehead [269].  $R_{3m}$ : Graßmann, H. jr. [64].

(S. 16 ff.). Für die vielfache Anwendbarkeit des formalen Raumes auf die geometrischen Gebilde (des Anschauungsraumes) gibt Wellstein [205] eine ganze Reihe von Beispielen; ihm ist unser Beispiel 4 (S. 19) entnommen; s. a. Müller [174] 11 ff. Die Anwendung des formalen Raumes auf nicht-räumliche Gegenstände kommt in der Literatur nicht vor; sie soll hier (Beispiel 1 u. 2) nur die völlige Unbestimmtheit der Beziehungsglieder eindringlicher veranschaulichen. Vgl. auch Frege [73] und dazu Korselt [143].

(S. 22).

## II. Der Anschauungsraum.

Anschauung, Wesenserschauung: Husserl [91] bes. 10 ff., Aster [2] 181 ff.; im übrigen s. u. Va, 1) synth. Ur. apr. Hilbert [83] 1 »logische Analyse der räumlichen Anschauung«, vgl. aber oben: form. Raum.

Gegensatz zum formalen Raum: Graßmann [61] S. XXIII u. 15: »Geometrie — Ausdehnungslehre, formale Wissenschaft«; Wernicke [206] 9 f.: »Mathematik des Extensiven — allg. Mathem. als Formenlehre«; Riehl [212] 169: »räumliche Mannigfaltigkeit — Mannigfaltigkeiten überhaupt«; Enriques [57] 239: »spazio intuitivo (visivo) — sp. analitico«; Stallo [243] 278, König [140] 89 f., Korselt [143]; Geysler [82] 287: »Raumbestimmtheiten der sinnfälligen Anschauung — mathem. Stellenordnungssystem einer Zahlmenge«; Schlick [223] 211: »System anschaulich räumlicher Gebilde — System reiner Urteile u. Begriffe«; Henry [104] 96, Sellien [238] 46 f. Ueber die Beziehungen der Mathem. zu beiden Gebieten vgl. Klein [133 a].

Unterschied zur empirischen Anschauung: Nelson [180] 378 f., [181]. Vom »Anschauungsraum« zu unterscheiden ist der »physiologische Sehraum«, vgl. z. B. Sterneck [246]: der diesem Sehraum (»space of sight«) bei Russell [220] 48 f. gegenübergestellte »physikal. Raum« (»physical space«) entspricht dem Ordnungsgefüge  $R$  mit besonderer Rücksicht auf seine Anwendung auf  $R'$  und  $R''$ ; die gleiche Bedeutung haben bei Schlick [223] 215 ff. »Gesichtsraum« — »physikalisch-objektiver Raum«. Ferner ist auch mit unserm »Anschauungsraum« nicht gleichbedeutend der von Veronese [254] 225 so bezeichnete Raum, der unserm phys. Raum  $R''$  entspricht.

(S. 23). Ungenauigkeit der Anschauung: Klein [132] XXXVII, 571, [133 a] 85, [154] 7 f., 18 f., 39 ff., [135], Hölder [113] 66, Wellstein [260] 180, Enriques [58] 273 ff., Study [249] 64, Christiansen [27] 31. Dagegen: Nelson [180] 407, [181] 103 ff., Geißler [80] 39.

Beschränktheit des Anschauungsgebietes: Klein [136] II 389, [135], Pasch [190] 18 f. (hier ist unter »empirischer Beobachtung« Anschauung verstanden; denn obwohl als Erkenntnisquelle fälschlich die Erfahrung angesehen wird, ist doch nicht vom physischen Raum die Rede), Schmied-Kowarzik [225] 132, Voß [256] 90.

(S. 24). Unmöglichkeit der Begriffsbestimmung: Wellstein [260] 22, Pasch [190] 16 f., Couturat [31] 133, Driesch [50] 109, Veronese [254] S. XVII, Mollerup [170] 3, Wernicke [262] 73, Schlick [223] 213, [224] 78. Dagegen: Geißler [80] 18 f., 30 ff.

(S. 24). Die Grundsätze. In erster Linie: Hilbert [110]; vgl. hierzu Frege [73] und Korselt [143]. Euklid [65], [67] 6—14, Pasch [190], Killing [128 a] 1 ff., [128 b] 128 ff., Lie [153] bes. 461, Whitehead [269] 7 ff., Schur [235] 2 ff., Mollerup [170] 4 ff., Klein [134] 15, Veronese [254] 15 ff., Enriques [59] 10 ff., Couturat [31] 192, Veblen [253] 376 ff., Geißler [79]. — Poincaré [204] 49 ff., Cohn [29] 208 ff., 228 ff., Husserl [119] 135, Nelson [180] 381 ff., Hessenberg [106], Ostwald [185] 373 ff., Wernicke [261] 25 ff., [262] 73 ff., Gerstel [81], Henry [104] 30 ff.

(S. 26). Zur Frage der Erweiterung des Raumgebietes: Killing [128 a] 14 ff., [129] I, s. bes. 80 ff., 349, Pasch [190] 19, Kerry [127] 82 ff., Driesch [50] 109 ff.

(S. 27). Im Kleinen gilt die euklidische Geometrie: Riemann [215] 12, Killing [128 a] 13. Inbezug auf den physikal. Raum der allg. Relativtheorie (s. u. III 3 b): Weyl [267] 25 ff., Cassirer [25] 144, Reichenbach [209] 30.

(S. 27). Das Riemannsche »Krümmungsmaß« des Raumes. Riemann [215] 13 f., Helmholtz [99] 17 f., Killing [128 a] 13 f.

Das Krümmungsmaß wird sehr häufig mißverstanden als Richtungsänderung, so z. B.: Lotze [160] 263, Pietzker [202] 15 und überall, Kirschmann [130] z. B. 354, 362, Riehl [212] 176 ff., Schmitz-Dumont [227] 150, Geißler [80] 58, Driesch [49] 40 f., Medicus [164] 23 Anm., [165] 12 f., Natorp [179] 296, 300, Weinstein [259] 36, Isenkrahe [120] 32 ff., [122] 74, 114 f., Cornelius [29 a] 219. Vgl. hierüber: Helmholtz [102] 393, Christiansen [27] 139, Hartmann [93] 376 f., Born [17] 229.

(S. 28 f.). Die metrischen Raumarten (nichteuklidische Geometrie). Besonders: Wellstein [260] 60 ff., Klein [132], [133], Killing [128 a], [129], Liebmann [154]. Ferner Vahlen [252] 237—298, Mollerup [171], Veronese [254] 413 ff., 482 ff., Simon [241], vgl. auch das Schema bei Heymans [109] 176. Grundsätzliches: Helmholtz [99] 18 f., Poincaré [204] 36 ff., Klein [136] II 390 ff., Study [249] 93 ff., 105 ff., Russell [217], Geiringer [78]. Von uns nicht behandelte Raumarten: Hausdorff [95], Killing [129].

Zur geschichtlichen Entwicklung: Bonola [15], [16], Engel [56]. Euklid [65], Simon [242], Lobatschewskij [157], [158], Bolyai [13], Gauß [77], [76] 157—268.

Der Irrtum, als könne die nichteuklidische Geometrie nur unter Bezugnahme auf die euklidische definiert werden, ist weit verbreitet, s. z. B.: Delboeuf [18] 69, Kirschmann [130] 354, 362, Riehl [212] 178 f., Sigwart [240] 81, Geißler [80] 52 f., 84, König [140] 89, Medicus [165] 12 f., Aster [2] 242, Cornelius [29 a] 218, Driesch [50] 115. Dagegen: Russell [217] 109, Wellstein [260] 152, Voß [256] 91, Christiansen [27] 138f.

(S. 29). Homogenität und Isotropie; Kongruenzräume, (konstante Krümmung). Riemann [215] 14 f., Helmholtz [97] 219 f., Poincaré [204] 34, 40 ff., auch 65 f., Lindemann Anm. 34 dazu [204] 288. (Eine engere, nicht übliche Bedeutung der Homogenität: Cohn [29] 247, Delboeuf [18] 63, 70, hier unterschieden von Isogenität = Homog. in unserm Sinne; eine weitere, auch für einen Raum ungleichen Krümmungsmaßes geltende Bedeutung: Reichenbach [209] 28 f.).

Der seltsame Irrtum, als sei nur der euklidische Raum homogen, ist auf philosophischer Seite sehr häufig anzutreffen: Lotze [160] 266 f. (s. hierzu: Russell [217] 107), Pietzker [202] 29, König [140] 29, Natorp [179] 307 f., Cassirer [25] 143 f., [26] 104, 113, Driesch [50] 113, 91.

(S. 30). Aufstieg von den dreistufigen, metrischen zu allgemeineren Raumarten.

(S. 31).  $R'_{sp}$ . Begriff der projektiven Geometrie. Die projektive Geometrie als reine Lagegeometrie geht zurück auf Leibniz' Plan einer Analysis Situs [150], [144] 69 ff., [148], [149], vgl. Couturat [30] 388—430, Cassirer [24] 65 ff.; hier werden keine Maßbegriffe benutzt, wohl aber die Begriffe Gerade und Ebene. Deshalb ist die projektive Geometrie als Verwirklichung des Leibnizschen Planes anzusehen, nicht die häufig auch Analysis Situs genannte Topologie (s. u.); vgl. hierzu: Couturat [31] 146, [30] 429. — Steiner [245], Staudt [244], Reye [210], Pasch [190] 4—100, Vahlen [252] 55—169, Killing [129] I 97 ff., II 73 ff., Russell [218] 381 ff., [217] 117—147, Klein [131] 10 ff., Enriques [59] 70 ff., Veblen [253], Wellstein [260] 152 ff.

Projektive Geometrie als Verallgemeinerung der metrischen: Killing [128 a] 112, Wellstein [260] 152 f., Vahlen [252] S. VI f., Lindemann Anm. 24 zu [204] 278; Cassirer [25] 99 ff., 115 ff. (in diesen wichtigen Ausführungen wird die Verallgemeinerung mit Hilfe der Transformationsinvarianten nur bis zum projektiven Raum geführt; dasselbe Verfahren bildet einen sehr geeigneten Weg zum topologischen Raum).

(S. 31)  $R_{3,3}^4$ . Begriff der Topologie. (Auch »Analysis Situs« genannt, vgl. aber oben: proj. Geom.). Couturat [31] 134 ff., Poincaré [205] 48 ff., [206] 33, [207] 55–61. — Riemann [214], Enriques [59] 59 ff., Dehn [37], [38], Klein [131] 30, [136] II 237 ff.

Zur Stufenfolge: metrischer, projektiver, topologischer Raum. Klein [136] II 294 ff., Enriques [61] 12 f., [58] 323, [59] 56 ff.

(S. 31). Mehrere Abmessungen. Allgemeines (auch Gesch. u. Lit.): Segre [237].  $R_{3,3}^4$ : Helmholtz [94] 197–202, Veronese [254] 567–627, Killing [128 a] 103 ff.  $R_{3,3}^4$ : Killing [128 a] 88 ff.  $R_{3,3}^4$ : Poincaré [207] 97 ff., Tietze [250]. (Vgl. auch oben unter:  $R_{3,3}^4$ ,  $R_{3,3}^4$ ,  $R_{3,3}^4$ ).

Versuche, die logische Unmöglichkeit mehrerer Raumabmessungen zu beweisen (vgl. auch unter Vb: Dreistufigkeit als Bedingung des Erfahrungsgegenstandes): Lotze [160] 249–260 (vgl. hierzu: Russell [217] 105 ff.), Pietzker [202] 64 ff., 87 ff., [203], Schmitz-Dumont [226] 45 f. Diese Ableitungen enthalten meist formale Trugschlüsse, die leicht nachzuweisen sind, wenn man sich vor Voraussetzungen hütet, die nur für den dreistufigen Raum gelten. Vollständige Verknennung des Begriffs der Abmessung: Kirschmann [130]. Vgl. Müller [174].

(S. 32).

## III. Der physische Raum.

Allgemein: In erster Linie Dingler [40] bes. 14 ff., 116 ff., 137 ff., 155 ff. und [47a]. Helmholtz [103] 395 ff., Clifford [28] 48–96, Dittrich [48].

Ueber den logischen Aufbau des  $R^3$  aus den Elementen des Sinneswahrnehmungen: Russell [221] 87 ff., vgl. Bergmann [10] 53 ff.

Ueber physisch-räumliche Verhältnisse: Helmholtz [99] 22 ff., Mach [161] 156 ff., [162] 389–422, Enriques [58] 269 ff., Einstein [52] 1 ff.

Gegenüberstellung des physischen und des reinen (Anschauungs- oder formalen) Raumes (s. a. unter IV:  $R^3$  als Zweck für  $R$  und  $R^3$ ): Russell [218] 372 »geometry as the study of actual space — g. as a pure a priori science«; Couturat [31] 221 ff.; Einstein [54] 5 f. »praktische Geometrie, eine Naturwiss. — rein axiomatische G., freie Schöpfung des menschl. Geistes«, [52] 2 »Sätze über die relative Lagerung praktisch starrer Körper — reine Geometrie«. Natort [179] 325 »Raumordnung des Empirischen — reiner geometrischer Raum«. Cassirer [25] 246 »physischer Raum der Körper — geometrischer Raum der Linien und Abstände« (dort Hinweis auf Leibniz), [26] 75 »empirischer — reiner Raum«, 108 f. »Maßverhältnisse des Empirischen — Raum der reinen Anschauung«. Medicus [164] 19 ff. »Erfahrungsraum — reine Anschauungsform«. Dingler [40] a. v. O. »empirische — logische Geometrie«. Meinong [166] 92 ff. »unser Raum der Wirklichkeit und der Physik — Raum der Geometrie«. Liebmann [155] 62. Enriques [61] 4 »physikalischer — anschaulicher Raum«. Kleinpeter [138] 81 »Geometrie als Lehre von den räumlichen Eigenschaften der Körper, Teil der Physik, — Geometrie als formale Wissenschaft«. Study [249] 86 »natürliche (konkrete) — abstrakte Geometrie«, 64 »empirischer Raum — Raum unserer Vorstellungswelt«. Ostwald [185] 362 ff. »natürlicher — mathematischer Raum«.

(S. 33). Ueber die Feststellung der physischen Geraden: Dingler [40] 17 ff., Poincaré [205] 44 f., Einstein [52] 3. — Helmholtz [103] 395, Clifford [28] 69 f., Study [249] 97, Wellstein [260] 121, Born [17] 220 f., Geiringer [78] 654 f.

Zum Unterschied von Geradensetzung und Maßsetzung vgl. auch: Klein [132] XXXVII 570.

(S. 33 ff.). Maßsetzung. Die freie Wählbarkeit wird nicht erkannt bei: Russell [217] 81, [220] 49, Hölder [113] 5, 30, L. Poincaré [208] 18 f., Aster [2] 221.

Die Maßsetzung darf sich nur auf ein Punktpaar beziehen, vgl. Einstein [52] 2 f., Schlick [223] 236; nicht auf einen starren Körper, wie es meist geschieht, so z. B.: Helmholtz [97] 198, 221, Poincaré [204] 62 ff., [207] 33 f., Natort [179] 320, Dingler [42] 47 f., 103, [40] 26, 116 ff., [45], [46], [47a], Wellstein [260] 126, Ostwald [185] 364, Wien [271] 52, Schlick [224] 36.

Maßsetzung mit Abhängigkeit von Ort und Zeit (»Bezugsmolluske«): Einstein [52] 67, Born [17] 223.

(S. 39 ff.). »Tatbestand«. Nur raum-zeitliches Zusammenfallen (»Koinzidenz«) ist physikalisch feststellbar. Einstein [52] 64 f., [51] 86, Born [17] 221, Petzoldt [200] 120, Schlick [223] 234 ff., [224] 35 f., Cassirer [26] 84. Daher nur topologische Bestimmungen eindeutig: Poincaré [205] 48 ff., [207] 60 f., Schlick [224] 28 ff., 35 f.

(S. 40 ff.). A) Feststellung des physischen Raumgefüges durch Versuche; Ausmessung der Fläche  $f$ . Feststellung der Krümmung. Helmholtz [103] 395 f., Einstein [52] 57, Born [17] 216 ff., Dingler [40] 125 ist nur scheinbar im Widerspruch hierzu; vgl. den »manuellen Aufbau der Geometrie« 137 ff. und [46] 122. s. u. B): aus  $T$  und  $M$  ergibt sich  $R$  eindeutig; ebenso Poincaré [204] 83 ff.; P's Einwand, der Raum würde so zugleich als euklidisch und nichteukl. gefunden werden können, trifft zu; das hängt eben von der Wahl der Maßsetzung ab. Uebrigens ist aber auch ohne eine solche durch die angegebenen Punktberührungen wenn auch kein metrischer, so doch ein topologischer physischer Raum bestimmt.

Zur wirklichen Ausführung von (astronom.) Versuchen: bes. Schwarzschild [236]. Engel [56] 216, Enriques [58] 286 ff., Study [249] 97 ff., Poincaré [204] 74, Lindemann Anm. dazu [204] 292.

Durch unsre Darlegung der Versuche ist die Auffassung widerlegt, als setzten solche das Ergebnis immer schon voraus oder müßten notwendig euklidisch ausfallen: Müller [172] 125 f., Weinstein [259] 37, Hönigswald [115 a] 80, Natort [179] 301, Cornelius [29 a] 218. Mit Recht wird dieser Auffassung widersprochen von: Study [249] 113, Medicus [164] 35 f.

(S. 46 ff.). B) Wahl der Raumart, Bestimmung der dazugehörigen Maßsetzung: Dies Verfahren ist allgemein üblich in der bisherigen Physik, und zwar Wahl des euklidischen Raumes. Jedoch findet es sich ausgesprochen nur bei Dingler [40] 116 ff., [45], [46], [47a] 26 ff.

Zu unserm Beispiel: die Erde als Ebene. Nicht zu verwechseln mit dem Beispiel einer nichteuklidischen Welt bei Poincaré [204] 67 ff., wo nicht die wirklich vorliegende, sondern eine erdachte physikalische Erfahrung zugrunde gelegt wird; ebenso bei Helmholtz [99] 24 f. (und ähnlich nach ihm häufig in der Literatur).

Die dargelegte Möglichkeit, die Erde bei anderer Maßsetzung als Ebene aufzufassen, hat natürlich nichts zu tun mit der Lehre von Barthel, Die Erde als Totalebene (Leipz. 1914), die auf durchaus unwissenschaftlicher Spekulation beruht.

(S. 52). Aenderung der Naturgesetze bei Zugrundelegung einer andern Raumform: Helmholtz [99] 29, Killing [128], Schlick [224] 32.

(S. 54). Das Funktionalverhältnis zwischen Raumart, Maßsetzung und Tatbestand:

1)  $R$  und  $T$  nicht eindeutig einander zugeordnet. Helmholtz [99] 29, Wellstein [260] 126, 138 f., Bauch [3] 111 ff., Natort [179] 302, 314, Cassirer [25] 142, [26] 101 ff., Poincaré [204] 73 ff., Dingler [42] 47, 30, 104, [46] 119 ff., 128, [47a] Teil I, Nelson [180] 396 ff., Hölder [113] 70 f., Wien [271] 52, Kleinpeter [138], 110, Becher [7] 181, Petzoldt [199], [200] 83, 120 f., Aster [2] 241, Schlick [223] 299 ff., [224] 31 ff., Geiringer [78] 654 f. Hierbei wird aber häufig übersehen (jedoch nicht von Helmholtz, Wellstein, Petzoldt, Dingler, Schlick, Geiringer), daß, wenn eine Maßsetzung aufgestellt ist, — und das ist in der Physik stets stillschweigend der Fall, — diese Zuordnung doch eindeutig ist, s. 2).

Die Mehrdeutigkeit folgt nicht etwa nur aus der notwendigen Ungenauigkeit der Messungen, wie es zuweilen aufgefaßt zu werden scheint, z. B.: Killing [128 a] 13, [129] I 17 f., Russell [217] 147, [218] 373, [220] 230, Hausdorff [95] 4 f., Wellstein [260] 60, 77, Natort [179] 316, Henry [104] 76, 84.

Ueberhaupt keine Brücke zwischen nichteuklidischer Geometrie (»Hirgepinst«) und Erfahrung vermögen zu erkennen: Pietzker [202], Kirschmann [130],

Sigwart [240] 81 f., Geißler [80], Driesch [49] 38, 41, 74, 222, König [140] 89, Herbart [105] 29 ff., Cornelius [29 a] 218 f., Wundt [273] 482 ff. (vgl. hierzu aber: Killing [129] II 198 ff., Voß [256] 91 ff.).

2) Jede der drei Bestimmungen folgt aber eindeutig aus den beiden andern:

a)  $M$  aus  $R$  und  $T$ . Dingler [42] 47 f., [40] 116 f., [45], [46] 124, [47 a] bes. 26 ff.

b)  $R$  aus  $T$  und  $M$ . Dingler [40] 125 ff., [46] 124; da hier  $M$  aus  $R$  (euklid.) und  $T$  bestimmt ist, so kann allerdings kein anderer  $R$  als der euklidische sich ergeben; die andre Möglichkeit besteht aber auch: [46] 122, [47 a] 164. Helmholtz [99] 23 f., Einstein [52] 3 ff., [54] 6, 10 f., 16, Schlick [224] 36, 55 ff.

(S. 55 ff.). 3) Forderung der Einfachheit der Gesamtdarstellung: Volkman [255] 407, Schlick [223] 301 f., [224] 32 ff., 88, Cassirer [26] 109; und nicht der ersten Setzungen ( $R$  oder  $M$ ); so verfährt dagegen Dingler (Wahl des einfachsten  $R$ ): [42] 47, 96 ff., [40] 117, 132, [44] 433 ff., [45] [46] 119 ff., 123, [47 a].

(S. 56 f.). a) Daß auf Grund der Einfachheitsforderung die euklidische Raumart gegebenenfalls aufgegeben werden müßte, wird bedingungsweise zugegeben: Poincaré [204] 52, [207] 54 f., Cassirer [25] 147, Becher [7] 181, Wien [271] 52, Wellstein [260] 144, Aster [2] 241, Hönigswald [115 a] 79, Bauch [3] 136 (hier nicht für den Fall größerer Einfachheit, sondern alleiniger Möglichkeit). Heymans [109] geht dagegen unverständlich, — nach ausführlicher Besprechung der Arbeiten von Riemann und Helmholtz! — immer von der Voraussetzung aus, daß »unser« Raum euklidisch sei; man habe niemals das Bedürfnis nach Messungen gehabt (S. 181), die Wahrscheinlichkeit für den nicht-euklidischen Fall sei unendlich klein (S. 243).

Bei Aufgabe des euklidischen Raumes nicht Wahl eines bestimmten nicht-euklidischen, sondern Aufstieg zu allgemeinerem Gefüge: Einstein [52] 59 ff., Freundlich [74] 55 f., Born [17] 210 ff., Geiringer [78] 355 ff.

(S. 56 ff.). b) Als Beispiel: allgemeine Relativitätstheorie. Der Raum in der Rel.-Th.: In erster Linie Weyl [264]. Ferner: Einstein [52], [53], Freundlich [74] 42 ff., Born [17] 210—235, Sellien [233], Geiringer [78] 656 f. Erkenntnistheoretische Erörterungen: Cassirer [26] 98—115, Petzoldt [200], Reichenbach [209], Einstein [54], Schlick [224], Haas [91]. Vgl. auch Riemann [215] 20, und dazu Weyl [267] 45 ff.

(S. 41 u. 57). Die Sonderbetrachtung des Raumes (ohne die Zeit) unterliegt bestimmter Beschränkung: Minkowski [168], Einstein [51] 85 f., [52] 19 f., 38, Cassirer [26] 91 ff.; auch früher schon bemerkt von Czolbe [34 a] Kap. 7 »Die Zeit als vierte Dimension des Raumes«, 51—55, und Palagyi [188] 1 ff. Zur Möglichkeit der Sonderbetrachtung: Weyl [264] 207.

(S. 57 f.). Die Raumverhältnisse im Schwerfeld: Weyl [264] 207 ff., Born [17] 223 ff., Freundlich [74] 42 ff., Reichenbach [209] 21 ff. Vgl. die bemerkenswerte Vorausabnung von Clifford [28] 232 f. Auf Grund von  $M_1$  nicht-euklidisch: Einstein [51] 122, [54] 6 f., Weyl [264] 223, Born [17] 210 ff., Flamm [66]. Die grundsätzliche Möglichkeit der Beibehaltung des euklidischen Raumes: Born [17] 222, Schlick [223] 302, [224] 35, 47, Einstein [54] 7 f.; die Betonung der Unmöglichkeit bei Reichenbach [209] 3, 27, 104 ist durchaus hiermit in Übereinstimmung, da dabei, wie in der Physik üblich, als Maßsetzung stets stillschweigend  $M_1$  vorausgesetzt wird. Erwägungen zugunsten der Beibehaltung des euklidischen Raumes: Dingler [42] 96 ff., [46] 125, [47] [47 a]; vgl. aber oben 3).

(S. 60). IV. Das gegenseitige Verhältnis der drei Raumbedeutungen.

$R$	} »Einsetzung«.	} Ostwald [183] 19 »Zuordnung«; die Gegenbeziehung: Dingler [47 a] 76 »logische Abbildung«.	
$R'$			Husserl [119] 26 f. »Entformalisierung oder Ausfüllung — Subsumtion«.
$R''$			Vgl. Bauch [3] 25 über die notwendige Voraussetzung eines »Subsumtionsallgemeinen« für Induktion, Bauch [4] 325 ff. über den Begriff als Möglichkeitsbedingung des Konkreten.

Die Lehre vom  $R$  — vom  $R'$  — vom  $R''$  als Fall des allgemeineren Wissenschaftsverhältnisses: »formale Ontologie — regionale Ontologie — Tatsachenzissenschaft«, so Husserl [119] 30 f., 111 f., [118] 221 ff. (Hinweis auf Leibniz' mathesis universalis, vgl. [151], auch [146]), 248 ff. (hier ist aber die irrije, für den Gedankengang der ausgezeichneten Darstellung jedoch nicht wesentliche Auffassung zu beanstanden, daß »unser Raum der Erscheinungswelt«, also wohl  $R''$ , unbedingt als euklidisch anzusehen sei). Driesch [50] »allgemeine Ordnungslehre — Lehre vom Sosein (darin: Lehre vom Raum als einer bestimmten Ordnungsbesonderheit) — Lehre von der Ordnung des Naturwirklichen«. Ostwald: die drei ersten Stufen der Wissenschaftspyramide [186], [183], Anwendung auf die Farbenlehre [187] 7 ff. Kleinpeter [138] 87 »operative Wissenschaften (Kombinatorik, Arithmetik, Logik) — Geometrie — Realwissenschaften (Physik usw.)«. Cohn (29) 334 ff. »rein konstruierende — Allgemeines nachkonstruierende — Besonderes nachkonstruierende Wissenschaften«.

Unsere Raumbedeutungen entsprechen etwa bei Russell [217] 146 f. »complex of relations — intuitive space — actually given space«; bei Müller [172] 132 f. »Raum der Mathematik — psychologischer Raum (=  $R'$ ?) — Erfahrungsraum«; bei Pasch [191] 185 »hypothetische Geometrie — (Geom. der) mathem., — (G. d.) physischen Punkte«; bei Enriques [59] 8 »abstrakte Räume — gewöhnlich, intuitiver Raum — physischer Raum«. Dagegen entsprechen ihnen nicht: König [140] »Anschauungs- — geometrischer — physischer Raum«; 1 und 3 sind von uns nicht behandelt, 2 ist  $R'$ . Ferner auch nicht: Hausdorff [95] »mathematischer, empirischer, absoluter Raum«; 2 ist von uns nicht behandelt, 3 kann überhaupt nicht Gegenstand der Erkenntnis sein, 1 umfaßt aber unsere drei Bedeutungen, vgl. S. 6: »in drei Beziehungen also, im Denken, in der Erfahrung, in der Anschauung haben wir Spielraum und Wahlfreiheit unter zahllosen Gestaltungen des mathematischen Raumes«.

(S. 61). Der Zweck der Aufstellung von  $R$  und  $R'$  liegt im  $R''$ : Ordnung der Erfahrung in räumlicher Hinsicht. Poincaré [205] 96 f., [207] 86, Cassirer [23] 42 ff., [25] z. B. 246 u. a., [26] 88 f., Kneser [139] 13, Hausdorff [95] 4, Wellstein [260] 143, Schlick [223] 35 f. Als reinsten Ausdruck des Verhältnisses erscheint die Kantische Auffassung des  $R'$  (vielleicht auch des  $R$ , worauf einige Aussprüche hindeuten könnten, vgl. Bauch [5] 178, 182 Anm.) als synthetischer Gesetzmäßigkeit für die Ordnung der Erfahrung, also des  $R''$ . Vgl. Bauch [5] 177 ff., Natorp [178] 8, 46 f., Christiansen [27] 140 f. Ueber die Bedeutung dieser Gesetzmäßigkeit als Funktion: Cassirer [25], Bauch [4].

(S. 62). V. Raumerkenntnis und Erfahrung.

a) Die Quellen der Raumerkenntnis.

Zur Unterscheidung zwischen Erkenntnisquelle im Sinne des logischen Rechtsgrundes und (psychologischer) Entstehung: Kant [125] 647 »entspringen — anheben«, Bauch [3] 96 »sich begründen — herkommen«, Meinong [166] 62 »Legitimation — Provenienz«.

$R$  aus Grundsätzen der Logik, erfahrungsunabhängig, s. d. Lit. unter I, bes. Couturat [31].

$R'$  aus Wesensschauung, erfahrungsunabhängig, s. d. Lit. unter II, bes. Husserl [119] 10 ff.

(S. 63).  $R''$  aus Induktion, Erfahrungserkenntnis: Lobatschewskij [158] 76 ff., Riemann [215] 16 ff., Kleinpeter [137] 42, [138] 107 ff., Study [249] 97 ff., Enriques [58] 269 ff., Medicus [164] 34 ff. Hier wird aber immer die erforderliche Maßsetzung entweder nicht beachtet oder, wie gewöhnlich in der Physik, nur stillschweigend vorausgesetzt. Da ohne Festsetzung einer Maßsetzung  $R''$  (als metrisches Gefüge) nicht durch Erfahrung bestimmt werden kann, so hat andererseits auch die meist vertretene Auffassung der Erfahrungsunabhängigkeit des  $R''$  ein gewisses Recht; s. hierzu die unter »III, Funktionalverhältnis, 1)  $R$  u.  $T$  nicht eindeutig...« genannten Schriften, ferner König [140] 92 f. Die Entscheidung zwischen den beiden streitenden Auffassungen hängt also von dem gewöhnlich nicht erörterten Umstande ab, ob eine Maßsetzung vorausgesetzt wird oder nicht.

(S. 63 ff.). Widersprechende Auffassungen über die Quellen der Raumkenntnis infolge Verschiedenheit der Raumbedeutungen:

1) in bezug auf  $R'$ : Kants »synthetische Urteile a priori«. Kant [125] 48—57, 153—162, [126] § 2 c, 2, § 6—13, vgl. Bauch [5] 160 ff., Cassirer [24] II 542 ff. Bauch [3] 111 ff. (S. 116 ausdrückliche Unterscheidung zwischen  $R'$  und  $R''$ ), Heymans [109] 160 ff. (über  $R$ : 164), Husserl [119] 31, König [140] 92 f., Nelson [180] 395 ff., Natorp [179] 302, 315, 318, Gerstel [81] 108 ff., Kirschmann [130], Tobias [251] 38—77, Sigwart [240] 82, Hönigswald [114], Aster [2] 193 ff., 223 ff. Meist ausdrücklicher Gegensatz zu Gauß, Riemann, Helmholtz.

2) Gegen Kant, a) in bezug auf  $R$ : Russell [217] 61, 146, [218] 456 ff., Couturat [32] 292 ff., [31] 218, Poincaré [204] 50 f., Wellstein [260] 100, Driesch [50] 117 f., Petzold [198] 195 f., Bergmann [8], Müller [173] 343, Schlick [223] 297.

b) in bezug auf  $R''$ : Gauß [76] 177, [56] 227, Helmholtz [99] 221, [101] 229 ff., [103] 396 (Irrtum ist aber, daß nicht außerdem  $R'$  möglich sei), Wellstein [260] 123, 138 f., Kleinpeter [137] 42, Mach [162] 389 ff., Erdmann [64], Bonola [15] 96, Study [249] 117, Born [17] 220, Geiringer [78] 653.

(S. 65). b) Der Raum als Bedingung der Erfahrung.

(S. 67). Kants Lehre von der transzendental-logischen Bedeutung des Raumes als Bedingung zur Möglichkeit jeder Erfahrung ist zwar durch die Entwicklung der Geometrie nicht erschüttert: Natorp [179] 309, Nelson [180] 386 ff., Sellien [238] 56; Helmholtz [100] 641, [103] 405 f., Müller [172] 132, aber von dem dreistufigen euklidischen Raum auf ein allgemeineres Gefüge zu übertragen.

Zu den Merkmalen desjenigen Raumgefüges, das die den Erfahrungsgegenstand konstituierende Raumgesetzlichkeit darstellt, gehören nicht:

(S. 66). 1) Dreistufigkeit. Russell [217] 162, Poincaré [204] 53, [205] 50 ff., 94 ff., [206] 98 ff., [207] 86 f., 97 f., Medicus [164] 14 f., 25, Simon [241] 26 ff., Aster [2] 250, Isenkrahe [122] 69, Dingler [47 a] 12 ff.

Die Dreistufigkeit fordern dagegen: Kant [124] (weist in § 9 einen Beweisversuch von Leibniz ab, versucht aber § 10 selbst eine Ableitung), Helmholtz [99] 28, Kirschmann [130] 395, Schmitz-Dumont [227] 149, Killing [129] I 267 ff., Liebmann [155] 77 ff., Riehl [212] 134, Wundt [273] 482, Natorp [179] 306 ff., [175] 383 f., [178] 52 f., [177] 7 f. (diese ausführliche Ableitung enthält einen formalen Fehler), Couturat [32] 317, Schultz [234] 29, Herberich [105] 35 f., Driesch [49] 38, Geißler [80] 135.

2) euklidische Beschaffenheit (»Ebenheit«): Helmholtz [99] 22, Russell [217] 61, Poincaré [204] 53, Wellstein [260] 142 ff., Medicus [164] 15, Christiansen [27] 138.

Dagegen halten am euklidischen Raum fest: Kirschmann [130], Schmitz-Dumont [227] 148 ff., Sigwart [240] 81 f., Liebmann [155] 77 ff., Geißler [80], Hönigswald [114] 891, vgl. jedoch [115 a] 80, Wundt [273] 482, Driesch [49] 41, Bauch [3] 125 ff., Natorp [179] 307 ff., 312 (gegen ihn: Müller [172] 129), Schultz

[234] 26 f., Meinong [166] 80—91, Sellien [238] 48. Als Grund wird mehrfach angeführt, daß nur die Gesetze des euklidischen Raumes von einer absoluten Länge unabhängig sind: Kirschmann [130] 355 f., König [140] 94, 223, Geißler [80] 64, Cohn [29] 248, Gerstel [81] 110, Cornelius [29 a] 218, vgl. Aster [2] 226, 237; dagegen aber: Russell [217] 110 ff., Müller [172] 130, Dittrich [48].

(S. 66). Aus der Forderung der Eindeutigkeit kann nicht auf euklidische Beschaffenheit geschlossen werden; so aber: Pietzker [202] 6, Natorp [179] 307 ff., 316, 322 f., Bauch [3] 133 ff. Dagegen: Cassirer [26] 100. Noch weniger aus der Forderung der Homogenität (vgl. oben unter: II, metr. Raumarten, Homog.); zudem ist diese Forderung selbst zweifelhaft, s. 3).

3) konstante Krümmung (Homogenität und Isotropie): Medicus [164] 17 ff., Hausdorff [95] 10, Delboeuf [18] 69 ff., Hartmann [93] 375 ff. (Vgl. auch: III, Funktionalverh. 3 b, Relat.-Th.).

Dagegen fordern Homogenität: Riehl [212] 133, 178, Russell [217] 137, 149 ff., Aster [2] 237 f., Henry [104] 92.

4) überhaupt metrische Eigenschaften: Poincaré [205] 48 ff., Cassirer [25] 115 ff. (aus diesen Darlegungen würde aber mit größerem Recht die Topologie zur »apriorischen Grundwissenschaft vom Raum« zu erklären sein, als die projektive Geometrie; s. o. II, Begriff d. proj. Geom.).

(S. 67). Aus den negativen Bestimmungen 1—4 folgt: das die Erfahrung konstituierende Raumgefüge ist der  $R_{nt}$ , womit dann auch die transzendental-logische Bedeutung von dessen formaler Gesetzlichkeit, dem  $R_{nt}$ , gegeben ist.