B. Ein neues Axiomensystem für die *c*-Funktionen

Der Grundriß des formalen Aufbaues der induktiven Logik stützte sich im wesentlichen auf [Prob.] und [C]. Kürzlich wurde von CARNAP ein in einigen Hinsichten vereinfachter axiomatischer Aufbau fertiggestellt[1], der hier kurz wiedergegeben werden möge. Während in unserer früheren Darstellung die Theorie der regulären und symmetrischen *c*-Funktionen nicht auf der Grundlage von Axiomen, sondern von Definitionen entwickelt und ein axiomatischer Weg erst für das λ-System beschritten wurde, werden nunmehr alle Teile der Theorie der *c*-Funktionen axiomatisch begründet. Zum Zweck der Unterscheidung von den früheren Axiomen kennzeichnen wir die neuen Axiome durch ein vorangestelltes „N". So wie früher wird auch hier stets vorausgesetzt, daß die Sätze *e* und *h* irgendeiner (endlichen oder unendlichen) Sprache L angehören und daß das zweite Argument von *c* (gewöhnlich *e)* nicht L-falsch sei.

I. Grundaxiome

NA1. Wertbereich. $0 \leq c(h,e) \leq 1$.

NA2. L-Implikation. Wenn $\vdash e \supset h$, dann $c(h,e) = 1$.

NA3. Spezielles Additionsprinzip. Wenn $e \,.\, h \,.\, h'$ L-falsch ist, dann $c(h \vee h', e) = c(h,e) + c(h', e)$

NA4. Allgemeines Multiplikationsprinzip. $c(h \,.\, h',e) = c(h,e) \times c(h', e \,.\, h)$.

NA5. L-äquivalente Argumente. Wenn $\vdash e \equiv e'$ und $\vdash h \equiv h'$, dann $c(h,e) = c(h', e')$.

Diese oder ähnliche Axiome sind auch von anderen Autoren verwendet worden. Sie sind zusammen äquivalent mit den fünf Konventionen $\mathbf{K}_1$ bis $\mathbf{K}_5$ von Abschn. 15.

Wir nehmen nun an, daß die Begriffe der regulären *m*-Funktionen und der regulären *c*-Funktionen so eingeführt werden, wie dies in Abschn. 16 geschehen ist (s. **D16-1** bis **D16-3**). Die Nullbestätigung $c_t(j)$ werde wieder definiert durch $c(j,t)$.

II. Regularitätsaxiom

NA6. Sofern die Anzahl der Individuen und die Anzahl der Grundprädikate endlich sind, dann $c(h,e) = 1$ nur wenn $\vdash e \supset h$.

(1') Eine Funktion *c* für L_N erfüllt die Axiome **NA1** bis **NA6** genau dann, wenn *c* regulär ist.

---

[1] Dieses neue Axiomensystem wurde bisher nicht veröffentlicht.

Beweis: 1. c sei regulär. Dann erfüllt c die Axiome **NA1** bis **NA5** wegen (**18-1**), (**18--2**), (**18-7**), **(18-9a), (18-4)** **(18-5).** Auch **NA6** ergibt sich leicht (Hinweis: (a) Man kann zunächst für L_N den Satz beweisen: wenn $\vdash i \supset j$, aber nicht $\vdash j \supset i$, dann $m(i) < m(j)$. Wegen der Voraussetzung gilt nämlich $R(i) \subset R(j)$, jedoch nicht die Umkehrung; daher muß es in $R(j)$ ein Z geben, welches nicht zu $R(i)$ gehört und dessen m-Wert auf Grund der Definition von m größer als 0 sein muß; (b) es gilt für L_N der Satz: wenn nicht $\vdash e \supset h$, dann $c(h,e) < 1$. Denn nach der Voraussetzung gilt auch nicht $\vdash e \supset e \,.\, h$; da jedoch $\vdash e \,.\, h \supset e$, so ergibt sie Anwendung von (a) : $m(e \,.\, h) < m(e)$. Daraus folgt die Behauptung (b) auf Grund der Definition von c. Aus (b) und **NA1** aber folgt **NA6**). 2. c erfülle **NA1** bis **NA6**. Dann ist c_t eine reguläre m-Funktion (nach (**14-5**) (**a**) und (**b**), $\mathbf{K}_6$ von Abschn. 15 und (**15-1**)). c basiert auf c_t . Daher ist c regulär.

Wegen (1') sind **NA1** bis **NA6** ausreichend, um sämtliche Lehrsätze für die regulären c-Funktionen abzuleiten, insbesondere auch das Divisionsprinzip und das Theorem von BAYES.

Sofern c **NA1** bis **NA5** erfüllt, jedoch nicht **NA6**, wird es *quasiregulär* genannt. In diesem Falle ist das c für gewisse Z 0. Ein Beispiel für Quasiregularität bildet die Proportionalregel (vgl. Abschn. 27, (**45**)).

III. Invarianzaxiome

Die folgenden Axiome fordern die Invarianz von $c(h,e)$ bei gewissen Transformationen von e und h. Sie bilden in ihrer Gesamtheit das gültige Kernstück des klassischen Indifferenzprinzips.

NA7. Symmetrie in bezug auf die Individuen. $c(h,e)$ ist invariant in bezug auf eine beliebige Permutation der Individuen.

m- und c-Funktionen, welche auch dieses Axiom erfüllen, werden symmetrisch genannt. Nach Hinzufügung von **NA7** können alle früheren Lehrsätze bis einschließlich Abschn. 22 abgeleitet werden, insbesondere auch alle Formen des direkten Induktionsschlusses und das Grenzwerttheorem von BERNOULLI.

Für die weiteren Axiome benötigen wir den Begriff der *Familie von Prädikaten.* Angenommen, zwei oder mehrere Eigenschaften seien in der folgenden Weise aufeinander bezogen: jedes Individuum muß eine und nur eine dieser Eigenschaften besitzen und zwar nicht bloß auf Grund eines Naturgesetzes, sondern kraft logischer Notwendigkeit. Wir sprechen dann von einer Familie verwandter Eigenschaften. Dieser Begriff kann in analoger Weise auf Relationen ausgedehnt werden. Wenn ein System L Grundprädikate enthält, die eine Familie verwandter Attribute bezeichnen, dann nennen wir sie eine Familie von verwandten Grundprädikaten (kurz eine Familie von Grundprädikaten). So können z. B. die vier Farben blau, grün, gelb, rot in einem bestimmten Individuenbereich, in welchem dies die einzigen möglichen Farben sind und kein Individuum farblos ist, eine solche Familie von Eigenschaften bilden und daher durch vier Grundprädikate bezeichnet werden, die zusammen eine Familie von Prädikaten ausmachen. Aus Gründen der Einfachheit war früher für den Aufbau der induktiven Logik vorausgesetzt worden, daß die Systeme L nur zweigliedrige Familien enthalten; danach wurde ein Attribut aus jeder Familie durch ein Grundprädikat bezeichnet und das andere durch dessen Negation.

NA8. $c(h,e)$ ist invariant in bezug auf eine beliebige Permutation der Prädikate einer Familie.

Es sei F eine Familie von k Grundprädikaten „P_1“, . . . , „P_k“ ; $h_1, \ldots, h_k$ seien Vollsätze dieser Prädikate mit derselben Individuenkonstante und h sei die Disjunktion dieser Sätze. Dann gilt:

(**2′**) **(a)** $c(h,e) == 1$ für beliebiges e (denn h ist L-wahr).

(b) e' enthalte kein Prädikat aus F. Dann $c(h_i,e') = \frac{1}{k}$ für jedes i ($i = 1, \ldots, k$).

(Denn wegen **NA8** sind die k Werte $c(h_i,e')$ alle gleich, ihre Summe ist wegen **NA3** und (**a**) gleich $c(h,e') = 1$.)

(c) $m(h_i) = \frac{1}{k}$ (aus (**b**) mit „t“ für e').

NA9. $c(h,e)$ ist invariant in bezug auf eine beliebige Permutation von Familien desselben Umfanges.

NA8 und **NA9** treten zusammen an die Stelle des früheren **A8**. Die nun erzielte Verallgemeinerung betrifft die Miteinbeziehung mehrgliedriger Familien (an Stelle der früheren zweigliedrigen). Die λ-Methode wird im folgenden nicht mehr auf voneinander unabhängige Grundprädikate, sondern auf eine mehrgliedrige Familie von Prädikaten angewendet. Ein System voneinander unabhängiger Grundprädikate im früheren Sinn ist daher jetzt als ein System getrennter zweigliedriger Familien von Prädikaten zu behandeln.

NA10. Für nichtgenerelle Sätze h und e ist $c(h,e)$ unabhängig von der Gesamtzahl der Individuen.

Dieses Axiom entspricht der früheren Forderung des Zusammenstimmens der c-Funktionen für die verschiedenen Systeme L.

NA11. $c(h,e)$ ist unabhängig von der Existenz anderer Familien als jener, die in h oder e vorkommen.

IV. Axiom der Relevanz von Einzelfällen

Dieses Axiom soll in präziser Weise das intuitive Prinzip formulieren, wonach wir aus der Erfahrung lernen, d. h. wonach ceteris paribus das Vorkommen einer Ereignisart in der Zukunft um so wahrscheinlicher ist, je häufiger sie bisher beobachtet wurde.

NA12. e sei nicht L-falsch und nichtgenerell; i und h seien Vollsätze desselben faktischen Molekularprädikates „M“ mit verschiedenen Individuenkonstanten, die beide in e nicht vorkommen. Dann gilt:

(a) $c(h,e\,.\,i) < c(h,e)$;

(b) $c(h,e\,.\,i) \neq c(h,e)$.

Die früher diskutierte Funktion $c†$ sowie die Proportionalregel erfüllen beide (**a**), verletzen jedoch (**b**). Für den Fall von $c†$ ist i auf alle Fälle irrelevant für h und für den Fall der Proportionalregel ist i irrelevant für h, sofern e eine Konjunktion von Vollsätzen mit „*M*" ist (beide c-Werte sind dann nämlich 1).

(**3'**) e, i, h, „*M*" mögen die Voraussetzungen von **NA12** erfüllen. Dann gilt:

(**a**) $c(h,e\,.\,i) > c(h,e)$, d. h. i ist positiv relevant für h bezüglich e.

(**b**) Es sei j eine Konjunktion von n Vollsätzen des Prädikates „*M*" ($n \geq 2$) mit n verschiedenen Individuenkonstanten, die nicht in e oder h vorkommen. Dann $c(h,e\,.\,j) > c(h,e\,.\,i)$ (aus (**a**)).

(**c**) $\boldsymbol{c(h,e\,.\,\sim i)} < c(h,e)$, d. h. $\sim i$ ist negativ relevant für h bezüglich e (aus (**a**) unter Verwendung des folgenden Lehrsatzes der Theorie der Relevanz: wenn i positiv relevant für h bezüglich e ist, dann ist $\sim i$ negativ relevant für h bezüglich e).

(**d**) $c(h,e\,.\,i) > c(h,e\,.\,\sim i)$ (aus (**a**) und (**c**)).

V. Bedeutungspostulate für F

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine Sprache L_F, deren Grundprädikate die k Prädikate „P_1", . . ., „P_k" einer Familie F sind ($k \geq 2$). Ein Satz aus L_F kann eine beliebige Anzahl von Individuenkonstanten enthalten, jedoch keine Variablen. e_F sei eine individuelle Verteilung von s in in bezug auf F mit den Anzahlen s_i($i = 1, ..., k$). $h_1, ..., h_k$ seien Vollsätze von „P_1", . .., „P_k" mit derselben Individuenkonstanten, die nicht in e_F vorkommt.

NA13. (**a**) $\vdash h_1 \vee h_1 \vee ... \vee h_k$;

(**b**) wenn $i \neq j$, dann ist $h_j\,.\,h_i$ L-falsch.

$m(e_F)$ ist wegen **NA10** unabhängig von anderen Individuen und wegen **NA11** auch unabhängig von anderen Familien. Der Wert von $m(e_F)$ hängt daher nicht von den speziellen Individuen und speziellen Eigenschaften ab, die in e_F erwähnt sind, sondern nur von den Zahlen s_i. Daher gilt:

(**4'**) Für jede m-Funktion, welche die Axiome erfüllt, gibt es für jedes k eine repräsentierende mathematische Funktion M_k von k Argumenten, so daß für jedes e_F: $m(e_F) = M_k(s_1, s_2, ..., s_k)$.

(**5'**) M_k ist invariant in bezug auf eine beliebige Permutation der k Argumente (nach **NA8**).

$e_F\,.\,h_1$ ist eine individuelle Verteilung von $s+1$ in mit den Anzahlen $s_1 + 1, s_2, ..., s_k$. Wir führen die definitorische Abkürzung ein:

D1. $C_k(s_1; s_2, ..., s_k) =_{\mathrm{Df}} \dfrac{M_k(s_1+1, s_2, ..., s_k)}{M_k(s_1, s_2, ..., s_k)}$.

(**6'**) (**a**) Für jede c-Funktion c und jedes k gibt es eine *repräsentierende mathematische Funktion* C_k mit k Argumenten, so daß $c(h_1,e_F) = C_k(s_1; s_2,$

..., s_k) für jedes e_F. Das Analoge gilt für h_2, h_3 usw. (nach **D1** und der Definition von c).

(**b**) C_k ist invariant in bezug auf eine beliebige Permutation der k — 1 Argumente, die auf das erste Argument folgen (nach (5')).

(**7'**) Für beliebige k Zahlen $n, p, s_3, ..., s_k$, deren Summe gleich s ist, gilt:

$$\frac{C_k(n; p+1, s_3, ..., s_k)}{C_k(p; n+1, s_3, ..., s_k)} = \frac{C_k(n; p, s_3, ..., s_k)}{C_k(p; n, s_3, ..., s_k)}$$

Beweis: Wenn wir den Index „k" unterdrücken und „ ..." für „s_3, ..., s_k" schreiben, dann gilt die identische Gleichung:

$$\frac{M(n+1, p+1, ...)}{M(n, p+1, ...)} \times \frac{M(n, p+1, ...)}{M(n, p, ...)} =$$
$$= \frac{M(n+1, p+1, ...)}{M(n+1, p, ...)} \times \frac{M(n+1, p, ...)}{M(n, p, ...)}.$$

Nach **D1** ist der erste Quotient $C(n; p + 1, ...)$; der zweite ist nach (**5'**) $\frac{M(p+1, n, ...)}{M(p, n, ...)} = C(p; n, ...)$; analog ist der dritte Quotient $C(p; n + 1, ...)$ und der vierte $C(n; p, ...)$.

(**8'**) (**a**) $\sum_{i=1}^{k} c(h_i, e_F) = 1$ (nach NA13 (a)).

(**b**) $\sum_{i=1}^{k} C_k(s_i; s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_k) = 1$ (nach (a)).

VI. Axiom der Voraussageirrelevanz

e_1 werde dadurch aus e_F gebildet, daß man „P_1" beibehält, alle übrigen Prädikate jedoch durch „$\sim P_1$" ersetzt. e_1 ist somit eine individuelle Verteilung für die s in in bezug auf die Division P_1, $\sim P_1$ mit den Anzahlen s_1 und s—s_1 **.** e_2, ..., e_k werden analog gebildet. $c(h_1, e_1)$ hängt dann für ein gegebenes k offenbar nur mehr von s_1 und s ab; daher kann man es durch eine Funktion $G_k(s_1; s)$ repräsentieren. Wegen **NA8** gilt das Analoge für $i = 2, ..., k$.

(**9'**) Für jede c-Funktion c und jedes k gibt es eine repräsentierende mathematische Funktion G_k, so daß $c(h_i, e_i) = Gk(s_i; s)$ für $i = 1, ..., k$.

(**10'**) Es sei $s_1 < s$**.** e'$_1$ sei dasselbe wie e_1, jedoch mit den Anzahlen $s_1 + 1$ und s — s_1 — 1. Dann gilt:

(**a**) $c(h_1, e_1') > c(h_1, e_1)$ (nach (3'd))

(**b**) $G_k(s_1 + 1; s) > G_k(s_1; s)$ (nach (a))

Das Axiom der Voraussageirrelevanz besagt, daß von den k Anzahlen in e_F alle mit Ausnahme von s_1 für h_1 irrelevant sind (dieses Axiom ist das genaue Analogon zu dem früheren Axiom **A9**, welches mit Hilfe der Q-Prädikate formuliert worden war):

NA14. $c(h_1, e_F) = c(h_1, e_1)$ für $k > 2$ (für $k = 2$, ist dieses Axiom in trivialer Weise erfüllt, weil dann $e_F = e_1$).

Für eine intuitive Erläuterung zu diesem Axiom vgl. die früheren Bemerkungen zu **A9**.

(11') Für $k \geq 2$ und beliebiges i gilt:

(**a**) $c(h_i, e_F) = c(h_i, e_i)$ (nach **NA14** und **NA8**);

(**b**) für beliebige Zahlen $s_2, ..., s_k$, deren Summe s — s_1 ist, gilt: $C_k(s_1; s_2, ..., s_k) = G_k(s_1; s)$ (aus (**a**), (**6'a**) und (**9'**)).

(**12'**) Für jede Folge von k Zahlen $s_1, ..., s_k$, deren Summe s ist, gilt:

$\sum_{i=1}^{k} G_k(s_i; s) = 1$ (nach (**8'**)).

Als spezielle Fälle von (**12'**) ergeben sich:

(**13'**) (**a**) $G_k(s; s) + (k - 1) \times G_k(0; s) = 1$ (aus (**12'**) für die Folge $s, 0, ..., 0$).

(**b**) $G_k(s + 1; s + 1) = 1 - (k - 1) \times G_k(0; s + 1)$ (nach (**a**)).

(**c**) $G_k(1; 1) = 1 - (k - 1) \times G_k(0; 1)$ (nach (**a**)).

(**d**) $G_k(s; s + 1) + G_k(1; s + 1) + (k - 2) \times G_k(0; s + 1) = 1$ (aus (**12'**) für die Folge $s, 1, 0, ..., 0$)

Es soll nun gezeigt werden, daß erstens die Werte von G_k für $s + 1$ eindeutig bestimmt sind, sofern die Werte von G_k für s gegeben sind, und daß zweitens alle Werte von G_k eindeutig bestimmt sind, sofern $G_k(0; 1)$ gegeben ist. Diese Ergebnisse gelten unter der Voraussetzung $k > 2$. Sie sind von John G. Kemeny im Jahr 1952 gefunden worden (s. Kemeny [Carnap], §4).

(**14'**) Für $k > 2$ und beliebige n, p, s, so daß $n + p \leq s$, gilt:

(**a**) $\frac{G_k(n; s+1)}{G_k(p; s+1)} = \frac{G_k(n; s)}{G_k(p; s)}$ (aus (**7'**) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im ersten Quotienten von (**7'**) die Summe der Argumentwerte $s + 1$ ist und im zweiten Quotienten s).

(**b**) $G_k(n; s+1) = G_k(0; s+1) \times \frac{G_k(n; s)}{G_k(0; s)}$ (aus (**a**) für $p = 0$)

(**15'**) Für $k > 2$: $G_k(0; s+1) \times \left\{ \frac{G_k(s; s)}{G_k(0; s)} + \frac{G_k(1; s)}{G_k(0; s)} + k - 2 \right\} = 1$ (aus (**13'd**) nach Umformung der beiden ersten Ausdrücke gemäß (**14'b**)).

Das erste Ziel ist damit erreicht; denn wenn alle G_k-Werte für s gegeben sind, dann ist zunächst $G_k(0; s + 1)$ durch (**15'**) bestimmt, sodann die Werte $G_k(n; s + 1)$ für $n = 1, ..., s$ auf Grund von (**14'b**), und schließlich $G_k(s + 1; s + 1)$ auf Grund von (**13'b**). Auch das zweite Ziel aber ist erreicht. Denn wenn $G_k(0; 1)$ gegeben ist, dann auch $G_k(1; 1)$ auf Grund von (**13'c**). Dies sind bereits alle G_k-Werte für s = 1. Sie bestimmen nach der eben getroffenen Feststellung alle Werte für $s = 2$ usw. Sämtliche G_k-Werte sind somit durch $G_k(0; 1)$ bestimmt. Der folgende Lehrsatz gibt diese G_k-Werte explizit mittels $G_k(0; 1)$ an.

(**16'**) Für $k > 2$ und beliebiges s und n gilt, sofern $0 \leq n \leq s$: $G_k(n; s) =$

$= \frac{n - (kn - 1) \times G_k(0;1)}{s - (s - 1) \times k \times G_k(0;1)}$ (Beweis mittels mathematischer Induktion;

denn der Lehrsatz gilt 1. für $s = 1$ im Fall $n = 0$ identisch und im Fall $n = 1$ wegen (**13'c**), 2. für $s + 1$ im Falle der Gültigkeit für s auf Grund von (**15'**,) (**14'b**) und (**13'b**), wie leicht zu ersehen ist).

Wenn also $G_k(0;1)$ gewählt wurde, dann können alle Werte von G_k bestimmt werden. Nach (**17'**) sind die m-Werte jeder Zustandsbeschreibung durch die Werte von G_k bestimmt. Damit aber sind auch die m-Werte für alle Sätze und die c-Werte für alle Satzpaare bestimmt (auf Grund von **D16-1** bis **D16-3**).

(**17'**) Es sei Z_F eine Zustandsbeschreibung für N Individuen und die k Prädikate der Familie F mit den Anzahlen N_i ($i = 1, \ldots, k$). Dann gilt $m(Z_F) = \prod_i \prod_{n=0}^{N_i-1} G_k(n; S_i + n)$, wobei $\prod_i$ über alle jene Werte von i läuft, für welche $N_i > 0$; $S_i = \sum_{r=0}^{i-1} N_r, S_1 = 0$ (Beweis analog zum Beweis in [C], S. 16-18.

Auf dieser Basis kann das λ-System errichtet werden. Wir haben gesehen, daß für ein gegebenes $k > 2$ alle Werte von G_k bestimmt sind, sofern $G_k(0 ; 1)$ gegeben ist. Diesen letzteren Wert kann man frei innerhalb bestimmter Grenzen wählen. Welches sind diese Grenzen? Wegen (**2'c**) ist $c(h_i,t) = \frac{1}{k}$. Daher ist wegen (**3'c**) und (**9'**) : $G_k(0 ; 1) < \frac{1}{k}$. Würde man $G_k(0 ; 1) > \frac{1}{k}$ wählen, so wäre **NA12** (**a**) und (**b**) verletzt, für $G_k(0 ; 1) = \frac{1}{k}$ wäre nur **NA12** (**b**) verletzt. Dieser letztere Fall gehört daher (ebenso wie der erstere) nicht zum System, kann jedoch als Grenzfall mit in Erwägung gezogen werden. Es zeigt sich, daß dieser Fall die Funktion c†darstellt. Wegen **NA1** ist offenbar $G_k(0 ; 1) \geq 0$. Für $G_k(0 ; 1) = 0$ ist **NA1** bis **NA5** erfüllt, jedoch **NA6** verletzt, die gewonnene c-Funktion also quasiregulär. Diese Funktion gehört daher ebenfalls nicht zum System, kann aber als Grenzfall behandelt werden. Es stellt sich heraus, daß dieser Fall mit der Proportionalregel zusammenfällt.

(**18'**) $0 < G_k(0 ; 1) < \frac{1}{k}$.

Wenn irgendein Wert zwischen 0 und $\frac{1}{k}$ für $G_k(0 ; 1)$ gewählt wird, dann sind alle Axiome für die damit gewonnene c-Funktion erfüllt. Wir führen jetzt einen Hilfsparameter ein:

D2. $\lambda'_k =_{\mathrm{Df}} k \times G_k(0 ; 1)$.

Wegen (**18'**) folgt:

(**19'**) $0 < \lambda'_k < 1$.

Wir unterdrücken von nun an den unteren Index „k" und schreiben „λ'" für „λ'_k" (und analog „λ" für „λ_k").

(**20'**) Für $k > 2$ und beliebiges s und n gilt, sofern $0 \leq n \leq s$:

$G_k(n;s) = \dfrac{n-(n-1/k)\lambda'}{s-(s-1)\lambda'}$ (aus (**16'**)).

Es ist zweckmäßiger, statt λ′ den Parameter $\lambda = \frac{\lambda'}{1-\lambda'}$ zu verwenden:

D3. $\lambda_k =_{Df} \frac{k \times G_k(0;1)}{1-k \times G_k(0;1)}$

(21') (**a**) $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda+1}$;

(**b**) $G_k(0;1) = \frac{\lambda}{k(\lambda+1)}$;

(**c**) Für $k > 2$: $G_k(n;s) = \frac{n+\frac{\lambda}{k}}{s+\lambda}$ (aus (**20'**) und (**a**)).

Eine Reihe von Lehrsätzen konnte nur unter der Voraussetzung $k > 2$ bewiesen werden. Für den Fall $k = 2$ muß man ein zusätzliches Axiom einführen. Für gegebene $k > 2$, s und $G_k(0; 1)$ ist nach (**21'**) $G_k(n; s)$ eine lineare Funktion von n. Es wird nun angenommen, daß dasselbe für $k = 2$ gilt:

VII. Axiom der Linearität

NA15. Für gegebenes s und gegebenes $G_2(0; 1)$ ist $G_2(n; s)$ eine lineare Funktion von n.

(**22'**) $G_2(n; s) + G_2(s — n; s) = 1$ (nach (**8'b**) und (**11'b**), wonach $G_2(n; s) = C_2(n; s — n)$).

(**23'**) $\frac{G_2(n;s+1)}{G_2(s-n;s+1)} = \frac{G_2(n;s)}{G_2(s-n;s)}$ (nach (7')).

Aus (**23'**) und **NA15** folgt:

(**24'**) $G_2(n;s+1) = G_2(0;s+1) \times \frac{G_2(n;s)}{G_2(0;s)}$.

Dies entspricht (**14'b**). Man kann daher jetzt in Analogie zu den früheren Beweisen die Entsprechung zu (**16'**) für den Fall $k = 2$ ableiten, ebenso jene zu (**21'c**), welche lautet:

(**25'**) $G_2(n;s) = \frac{n+\frac{\lambda}{2}}{s+\lambda}$.

Wir bezeichnen nun wieder die durch ein beliebiges λ charakterisierte c-Funktion durch c_λ und die entsprechende m-Funktion durch m_λ. Unter Benützung von (**21'**) und (**24'**) erhält man dann (**26'a**) aus (**17'**) (für den Beweis vgl. [C], S. 30-32. Die Definition von $\begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}$ lautet: a) $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, b) $\begin{bmatrix} r \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}(r — n)$).

(**26'**) (a) $m_\lambda(Z_F) = \prod_i \prod_{n=0}^{N_i-1} \frac{n+\frac{\lambda}{k}}{S_i+n+\lambda}$ (für $\prod_i$ und S_i gilt dasselbe wie in (**17'**)).

(b) $= \frac{\prod_i \left(\frac{\lambda}{k}\left(\frac{\lambda}{k}+1\right)\left(\frac{\lambda}{k}+2\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{k}+N_i-1\right)\right)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+N-1)}$ (für $\sum N_i = N$);

$$(\mathbf{c}) = \frac{\prod_i \begin{bmatrix} N_i + \frac{\lambda}{k} - 1 \\ N_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N + \lambda - 1 \\ N \end{bmatrix}};$$

(**d**) Es sei Str_F die dem Z_F entsprechende Strukturbeschreibung. Dann gilt:

$m_\lambda(\mathrm{Str}_F) = m_\lambda(Z_F) \times \frac{N!}{N_i! \ldots N_k!}$ (aus (**c**) mit Hilfe von (**21-2a**) und (**21-3e**), Abschn. 21),

$$= \frac{\prod_i \begin{bmatrix} N_i + \frac{\lambda}{k} - 1 \\ N_i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N + \lambda - 1 \\ N \end{bmatrix}}.$$

Damit ist wieder gezeigt, daß das λ eine vollständige Charakterisierung von *m* und *c* gibt. In dem neuen System sind die früheren Axiome **A10** und **A11** überflüssig geworden; neu hinzugetreten ist dafür **NA15**.

Das Prädikat „*M*“ sei definiert als eine Disjunktion „$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_w$“ der *w* Prädikate „$P_1$”, ..., „$P_w$“ aus *F*, so daß „*M*“ also die logische Weite *w* besitze. e_F habe dieselbe Bedeutung wie bisher; h_M sei ein Vollsatz von „*M*“ mit einer neuen Individuenkonstanten. s_M sei $s_1 + s_2 + \ldots + s_w$. Dann folgt mit Hilfe von (**9'**) und (**21'e**):

$$(\mathbf{27'})\ c_\lambda(h_M,e_F) = \frac{s_M + w\frac{\lambda}{k}}{s+\lambda},$$

$$= \frac{\left(\frac{s_M}{s}\right)s + \left(\frac{w}{k}\right)\lambda}{s+\lambda}.$$

$c_\lambda(h_M,e_F)$ ist somit das gewogene Mittel aus der beobachteten relativen Häufigkeit $\frac{s_M}{s}$ und der relativen Weite $\frac{w}{k}$ mit den Gewichten *s* und λ. $\frac{s_M}{s}$ ist der empirische Faktor, $\frac{w}{k}$ der logische Faktor, λ das Gewicht des letzteren. Für λ = 0 erhält man den *c*-Wert $\frac{s_M}{s}$, also die Proportionalregel, welche **NA6** verletzt; für λ = ∞ erhält man $c_\lambda(h_M,e_F) = \frac{w}{k} = c_\lambda(h_M',t)$, was in Widerspruch steht mit **NA12** (**b**). Es sind dies die beiden extremen Methoden, die in das neue λ -System nicht eingeschlossen werden. Für λ gilt daher jetzt die Bedingung 0 < λ < ∞, weshalb *c* zwischen $\frac{s_M}{s}$ und $\frac{w}{k}$ zu liegen kommt (vorausgesetzt, daß diese beiden Werte voneinander verschieden sind).

Für Familien von verschiedenem Umfang, deren jede in einer eigenen Sprache behandelt wird, unterscheiden wir so wie früher zwei Arten von induktiven Methoden. In der ersten Art wird für λ ein fester Wert gewählt, der von k unabhängig ist. In den induktiven Methoden der zweiten Art ist λ von k abhängig. Die früheren Diskussionen der verschiedenen induktiven Methoden können in das neue System übernommen werden. Insbesondere erhält man für $\lambda_k = k$ wieder die Funktion c^*.

VIII. Axiom der Analogie

Die Sprache L enthalte nun zwei Familien: F^1 bestehe aus den k_1 Prädikaten „P_1^1", „P_2^1" usw. und F^2 aus den k_2 Prädikaten „P_1^2", „P_2^2"usw. Ein Q-Prädikat Q_{ij} sei die Konjunktion **.** (i = 1, ..., k_1; j = 1, ..., k_2). Es gibt $k = k_1k_2$ solche Q-Prädikate. e^1 sei eine individuelle Verteilung für F^1 und e^2 für F^2, wofür in beiden Fällen dieselben s Individuenkonstanten genommen werden. e sei e^1 **.** e^2; dies ist offenbar eine individuelle Verteilung für die k Q-Prädikate. s_{ij} sei die Anzahl der Individuen mit der Eigenschaft Q_{ij} in e. Für beide Familien werde dasselbe λ gewählt. Mittels (**26'**) kann $m_\lambda(e^1)$ und $m_\lambda(e^2)$ bestimmt werden.

Welchen Wert soll man für $m_\lambda(e)$ wählen? Dieser Wert ist durch die bisherigen Axiome noch nicht bestimmt. Es sollen zunächst versuchsweise zwei Lösungen betrachtet werden, aus welchen wir dann eine Kombination bilden werden.

Im ersten Lösungsvorschlag wird die Klasse der k Q-Prädikate als Pseudofamilie $F^{1,2}$ genommen. Wir definieren $m^{1,2}$ für $F^{1,2}$ so, als wäre $F^{1,2}$ eine richtige Familie. In Analogie zu (**26'c**) erhalten wir also:

D4. $$m_\lambda^{1,2}(e) =_{Df} \frac{\prod_{i=1}^{k_1}\prod_{j=1}^{k_2}\begin{bmatrix} s_{ij}+\frac{\lambda}{k}-1 \\ s_{ij}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s+\lambda-1 \\ s\end{bmatrix}}.$$

(e) hängt allein von den Q-Zahlen s_{ij} in e ab, nicht von den P-Zahlen in e^1 und e^2.

In der zweiten versuchsweisen Lösung wird $m^{1|2}(e)$ als das Produkt der m-Werte der beiden getrennten Familien definiert:

D5. $m_\lambda^{1,2}(e) =_{Df} m_\lambda(e^1) \times m_\lambda(e^2)$.

$m_\lambda^{1,2}(e)$ hängt allein von den P-Zahlen ab, nicht von den Q-Zahlen.

Diese beiden Definitionen sollen jetzt mit Hilfe von drei Beispielen A, B, C von individuellen Verteilungen für s = 20 Individuen und $k_1 = k_2 = 2$ auf ihre Adäquatheit hin überprüft werden. *Beispiel A*: Alle vier Q-Zahlen seien fünf. Dann sind die P-Zahlen für P_1^1 und P_2^1 aus der Familie F^1 beide 10 (d. h. 10 Individuen haben die Eigenschaft P_1^1 und 10 die Eigenschaft P_2^1); ebenso sind die P-Zahlen der beiden Prädikate P_1^2 und P_2^2 aus F^2 beide 10. *Beispiel B*: Die Q-Zahlen von Q_{11} und Q_{22} seien beide 10, jene von Q_{12} und Q_{21} seien beide 0. Für die P-Zahlen aus F^1 und F^2 gilt dasselbe wie im Beispiel A. *Beispiel C*: Die Anzahlen von Q_{11} und Q_{12} seien beide 10. Für F^2 gilt dasselbe wie bisher; dagegen hat P_1^1 die Anzahl 20, daher P_2^1 die Anzahl 0.

Es erscheint als plausibel, zu verlangen, daß die beiden folgenden Forderungen erfüllt werden müssen: (**a**) Es sollte gelten $m(A) < m(B)$, da B eine größere Uniformität aufweist als A. Diese Forderung wird von $m_{\lambda}^{1,2}$ erfüllt (da die Q-Zahlen in A gleich sind, in B jedoch ungleich); dagegen wird sie nicht erfüllt von $m_{\lambda}^{1\|2}$ (denn hier ergeben sich beide Male dieselben Werte, da die P-Zahlen in A und B dieselben sind). (**b**) Es sollte gelten $m(B) < m(C)$, weil die Verteilung für F' in C eine größere Uniformität besitzt als in B, während die Verteilung für F^1 in C dieselbe ist wie in B. Diese Forderung wird von $m_{\lambda}^{1\|2}$ erfüllt, nicht jedoch von $m_{\lambda}^{1,2}$ (denn hier ergeben sich dieselben Werte für B und C wegen der Gleichheit der Q-Zahlen in beiden Fällen).

Ganz allgemein gilt: Eine Lösung, die nur die P-Zahlen verwendet, kann die Bedingung (**a**) nicht erfüllen, und jede, welche nur die Q-Zahlen verwendet, nicht die Bedingung (**b**). Eine dritte Lösung, in welcher $m_{\lambda,\eta}(e)$ als gewogenes Mittel der ersten beiden Lösungen mit den Gewichten η und 1 — η (für einen neuen Parameter η) definiert wird, erfüllt beide Forderungen:

D6. $m\lambda,\eta(e) = Df\, \eta \times m_{\lambda}^{1\|2}(e) + (1-\eta) \times m_{\lambda}^{1,2}(e)$.

η kann unabhängig von λ gewählt werden, so daß $0 < \eta < 1$. Je größer η ist, desto stärker ist der Analogieeinfluß, d. h. desto größer ist der Unterschied zwischen den beiden c-Werten in **NA16**. Diese Methode läßt sich leicht auf mehr als zwei Familien ausdehnen; es werden dabei keine neuen Parameter benötigt[1]. Die Forderung (**b**) kann in verallgemeinerter Form durch das folgende Axiom der Analogie ausgedrückt werden:

NA16. Es sei e eine individuelle Verteilung für zwei Familien (mit beliebigem k_1 und k_2). i und j seien Vollsätze von Q_{11} und Q_{21} mit derselben Individuenkonstanten, die nicht in e vorkommt. h sei ein Vollsatz von Q_{12} mit einer anderen Individuenkonstanten, die in e nicht vorkommt. Dann $c(h,e.\, i) > c(h,e.\, j)$. (Die Verallgemeinerung für andere Q-Prädikate folgt aus **NA8**).

IX. Axiom des unendlichen Individuenbereiches

Nach **NA10** sind die Werte von c für nichtgenerelle Sätze in L_∞ dieselben wie in L_N. Falls e oder h (oder beide) Variable enthalten, so wird ein neues Axiom erforderlich. Im Einklang mit der früheren Festsetzung wird für diesen Fall der Wert von c in L_∞ als Grenzwert seiner entsprechenden Werte in den endlichen Sprachen genommen:

NA17. ${}_Nc$ sei eine c-Funktion für L. Die entsprechende c-Funktion ${}_\infty c$ für L_∞ ist dann bestimmt durch: ${}_\infty c\,(h,e) = \lim_{N \to \infty} {}_Nc(h,e)$.

[1] Diese Methode ist von CARNAP zusammen mit JOHN KEMENY ausgearbeitet worden.