D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik. Band I. XII und 471 Seiten. Springer, Berlin, 1934.

Bei den Diskussionen über die Grundlagen der Mathematik in den letzten Jahrzehnten sind hauptsächlich drei Auffassungen aufgetreten: die von Frege und Russell begründete Auffassung des sog. Logizismus, die von Brouwer und Weyl vertretene Lehre des Intuitionismus, und die von Hilbert und seinen Mitarbeitern, vor allem Bernays, entwickelte Auffassung des Formalismus. Das vorliegende Werk wird als ausführliche, systematische Darstellung der formalistischen Auffassung für alle an den Grundlagenproblemen Interessierten die grösste Bedeutung besitzen. Der erste Band ist 1934 erschienen; das Erscheinen des zweiten Bandes war für bald danach geplant, ist aber einstweilen verschoben worden. Der Grund dafür liegt vor allem in der durch die Ergebnisse von Gödel geschaffenen neuen Situation. Es ist das Ziel der Hilbertschen Bemühungen, die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik in einer formalen Meta-Mathematik zu beweisen. Diese Meta-Mathematik soll Sich auf gewisse, für besonders zuverlässig gehaltene, sog. finite Schlussweisen beschränken, und auf alle darüber hinausgehenden Schlussweisen der klassischen Mathematik verzichten. Andrerseits besagt das Ergebnis von Gödel, dass, wenn ein mathematisches System S widerspruchsfrei ist, man die Widerspruchsfreiheit von S nicht in einer Meta-Theorie beweisen kann, die nur solche logischen Hilfsmittel verwendet, die auch in S vorhanden sind. Daraus ergibt sich eine neuartige Schwierigkeit für die Erreichung des Hilbertschen Zieles. Einige Mathematiker, aber nicht Gödel selbst, meinen sogar, dass es nunmehr als unerreichbar angesehen werden muss. In dem vorliegenden ersten Band wird die Schwierigkeit noch nicht diskutiert. Nur im Vorwort bemerkt Hilbert, „dass die zeitweilig aufgekommene Meinung, aus gewissen neueren Ergebnissen von Gödel folge die Undurchführbarkeit meiner Beweistheorie, als irrtümlich erwiesen ist. Jenes Ergebnis zeigt in der Tat auch nur, dass man für die weitergehenden Widerspruchsfreiheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen muss, als dieses bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist.“ Die Durchführung dieses Gedankens ist für den zweiten Band geplant.

Wenn der erste Band auch nicht die gegenwärtig am meisten drängenden Fragen behandelt, so ist er doch von grossem Interesse als ausführliche Darlegung der formalistischen Auffassung. Zunächst werden das Problem der Widerspruchsfreiheit und das Entscheidungsproblem erklärt und diskutiert. Dann wird das „finite Schliessen“ und seine Grenzen erläutert. Dies ist ein Zentralpunkt der ganzen Lehre, zu dem nachher einiges bemerkt werden soll. Dann wird mit dem Aufbau des formalen Systems begonnen: Aussagenkalkül, Hinzunahme des Identitätszeichens und der Funktionszeichen. Durch Anfügung der Peanoschen Axiome wird ein System der Zahlentheorie, einschliesslich des Prinzips der vollständigen Induktion, in verschiedenen Varianten errichtet. Die Anwendung rekursiver Definitionen — einfache und verschränkte Rekursionen — wird ausführlich diskutiert, besonders im Hinblick auf die Frage der Erhaltung der Widerspruchsfreiheit bei der Hinzunahme rekursiver Definitionen. Im Schlusskapitel werden die individuellen Kennzeichnungen diskutiert, d.h. Ausdrücke von der Form „diejenige Zahl x, für die A(x) gilt". Es wird festgesetzt, dass ein solcher Ausdruck zulässig sein soll, wenn nachgewiesen ist, dass es genau eine Zahl mit der kennzeichnenden Eigenschaft gibt. (Hierzu ist zu bemerken, dass diese Festsetzung nicht unbedenklich erscheint, da durch sie die Formbestimmungen des Systems indefinit werden; d.h. es gibt kein Verfahren, nach dem man für jede vorgelegte Zeichenreihe entscheiden kann, ob sie eine Formel des Systems ist oder nicht.) Als spezielle Kennzeichnug wird „die kleinste Zahl x, für die A(x) gilt (oder O, falls es keine solche Zahl gibt)" eingeführt. Es wird gezeigt, dass, falls die Axiome eines Systems keine Formelvariablen (Prädikatvariablen) enthält, die Kennzeichnungen (Ausdrücke von der Form „derjenige, welcher ...") eliminierbar wird, dass also die Widerspruchsfreiheit des Systems bei der Hinzufügung dieser Ausdrücke erhalten bleibt. Hieraus folgt das weitere wichtige Ergebnis, dass, wenn Addition und Multiplikation eingeführt sind, alle weiteren rekursiven Definitionen sich durch explizite Definitionen ersetzen lassen. Schliesslich wird gezeigt, dass Funktionszeichen durch Prädikate ersetzt werden können. Das Problem der Widerspruchsfreiheit für das konstruierte System der Zahlentheorie bleibt zunächst offen. (Inzwischen hat G e n t z e n 1937 einen Beweis für diese Widerspruchsfreiheit geliefert. Da er dabei jedoch in der Metatheorie transfinite Ordinalzahlen und das Prinzip der transfiniten Induktion verwendet, so bedarf die Frage, ob seine Beweismittel sich noch im Bereich des „finiten Schliessens" befinden, einer näheren Untersuchung.) —

Ich möchte eine Bemerkung über die Darstellung der Grundlagenfragen in den einleitenden Kapiteln des vorliegenden Bandes anfügen. Wir finden hier zwei Arten von Fragen und Begriffsbildungen, oder zumindest zwei Arten von Formulierungen. Zunächst sind da die formalen Formulierungen, d.h. solche, die sich auf die Arten und Reihenfolge der Zeichen in Ausdrücken des behandelten Systems beziehen, ohne von dem Bezeichneten zu sprechen. Man kann z.B. Fragen der folgenden Art in formaler Weise behandeln: „Ist die vorgelegte Reihe von Formeln ein Beweis?" „Gibt es einen Beweis für die vorgelegte Formel?" „Ist das vorgelegte System widerspruchsfrei?" und dgl. Nachdem Hilbert selbst den formalen Charakter seiner Metamathematik oder Beweistheorie oft betont hat, ist die Auffassung nicht so fernliegend, dass alle Probleme der logischen Grundlagen der Mathematik und insbesondere alle die Widerspruchsfreiheit betreffenden Fragen diesen formalen Charakter haben. Ich habe diese Auffassung und glaubte, darin mit Hilbert übereinzustimmen. Nun finde ich aber eine Menge nichtformaler Definitionen und Fragen in den genannten Kapiteln, und zwar gerade im Zusammenhang mit einem der Kernpunkte der ganzen Auffassung, nämlich bei der Charakterisierung dessen, was von Hilbert als *finiter Standpunkt* oder *finite Methode* bezeichnet wird. Dieser Charakterisierung werden lange Ausführungen gewidmet. Manche Bestimmungen sind negativ; es werden Annahmen genannt, die nicht als finit zugelassen sind (z.B.: „die Voraussetzung, dass die ganzen Zahlen einen Individuenbereich, also eine fertige Gesamtheit bilden“ (S. 15); Frege verwendet die „als existierend vorausgesetzte Gesamtheit aller überhaupt denkbaren einstelligen Prädikate“ (S. 15); Freges „Annahme der Totalität der Zahlenreihe“ (S. 15); „In der Voraussetzung einer solchen Totalität des „Individuenbereiches“ liegt ... eine idealisierende Annahme, die zu den durch die Axiome formulierten Annahmen hinzutritt“ (S. 2)). Andrerseits werden auch positive Bestimmungen gegeben (z.B. „Das direkte inhaltliche, in Gedankenexperimenten an anschaulich vorgestellten Objekten sich vollziehende und von axiomatischen Annahmen freie Schliessen“ (S. 32); „indem wir allemal mit dem Wort finit zum Ausdruck bringen, dass die betreffende Überlegung, Behauptung oder Definition sich an die Grenzen der grundsätzlichen Vorstellbarkeit von Objekten sowie der grundsätzlichen Ausführbarkeit von Prozessen hält und sich somit im Rahmen konkreter Betrachtung vollzieht“ (S. 32)). Diese Beschreibungen der finiten Methode sind nicht formal; die vorhin erwähnten Formulierungen sprechen nicht von den Zeichen, sondern vom Bezeichneten, die letztgenannten sprechen von den Vorstellungsprozessen; beides geht über die Grenzen der Logik hinaus. (In neuerer Terminologie: beide Arten von Bestimmungen sind nicht syntaktisch; die ersteren sind semantisch, die letzteren pragmatisch). An sich bestehen hiergegen keine Bedenken; denn die Mathematik kann und soll gewiss von den verschiedensten Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Hier aber, durch die Vermengung der logischen mit nichtlogischen Fragen wird die Klarheit der Hilbertschen Hauptthese beeinträchtigt. Die Frage, ob nur einzelne Zahlen existieren, oder auch die ganze Zahlenreihe als fertige Gesamtheit, scheint doch bedenklich nahe den Formulierungen, wie wir sie in den Spekulationen der Metaphysiker finden. Und die genannten positiven Bestimmungen geben mehr eine psychologische als eine logische Beschreibung der Methode, und sind daher viel zu vage, um in einem konkreten Fall entscheiden zu können, ob ein vorgelegter Schluss noch als finit gelten kann. Es erscheint wünschenswert, dass der Bereich der Mittel, die als finit bezeichnet und für die Führung des Widerspruchsfreiheitsbeweises zugelassen werden sollen, durch formale Bestimmungen abgegrenzt wird. Wenn, wie scheint, die Vertreter der Hilbertschen Auffassung eine genaue Abgrenzung als grundsätzlich unmöglich ansehen, so müsste doch versucht werden, durch formale Bestimmungen eine obere und untere Approximation vorzunehmen, die schrittweise verbessert, d.h. auf engere Grenzen gebracht werden könnte. (So könnte man z.B. anstatt der nichtformalen Bestimmung „im finiten Schliessen wird die Annahme der Totalität der Zahlenreihe abgelehnt“ etwa die folgende formale Bestimmung geben „im finiten Schliessen werden gebundene Zahlvariablen abgelehnt“ oder vielleicht „... wird die Negierung eines Allsatzes mit einer Zahlvariablen abgelehnt“ oder was immer sonst mit jener nichtformalen Bestimmung gemeint sein mag.) Die vorstehende Bemerkung ist nicht als Kritik des Buches gemeint; zum Glück sind die wertvollen Ausführungen im Hauptteil des Buches nicht beeinflusst durch die genannten Diskussionen, sondern geben streng formal vor. Die Bemerkung möchte nur einen Wunsch zum Ausdruck bringen, der vielleicht im zweiten Band erfüllt werden konnte, nämlich den Wunsch nach einer Kennzeichnung des finiten Standpunkts, die anstatt (oder neben) Formulierungen der angedeuteten Art formale Bestimmungen geben würde und uns dadurch ein deutlicheres Verstehen der Hilbertschen These ermöglichen würde.

R. Carnap