Über Extremalaxiome

Von

Rudolf Carnap (Prag) und Friedrich Bachmann (Münster i. W.)

Einige wichtige Axiomensysteme sind so aufgebaut, daß zunächst eine Reihe von Axiomen genannt wird, die gewisse Aussagen über die Grundbegriffe der axiomatischen Theorie machen und zum Schluß ein Axiom eigener Art auftritt, das scheinbar über die vorangehenden Axiome und nicht über die Grundbegriffe der Theorie spricht. Das bekannteste Axiomensystem dieser Art ist Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie; es wird durch das berühmte „Vollständigkeitsaxiom" abgeschlossen, das folgendermaßen lautet[1]):

„Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicier genannten Axiome keiner Erweiterung fähig ist, d. h. zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System die Axiome AI-V1 erfüllt sind."

Axiome von der Art des Hilbert schen Vollständigkeitsaxioms die den Gegenhänden einer axiomatischen Theorie eine Maximaleigenschaft zuschreiben, indem sie aussagen, daß es kein umfassenderes System von Dingen gibt, das ebenfalls eine Reihe von Axiomen erfüllt, bezeichnen wir als Maximalaxiome. Die gleiche axiomatische Rolle wie die Maximalaxiome spielen in anderen Axiomensystemen Minimalaxiome, die den Gegenhänden der Disziplin eine entsprechende Minimaleigenschaft zusprechen. Maximal- und Minimalaxiome fassen wir unter der Bezeichnung Extremalaxiome zufsammen.

[1]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig-Berlin. Unter dem Hilbert schen Vollständigkeitsaxiom verstehen wir die Form, die sich in der 2.-6. Aufl. sindet, nicht die „*Lineare Fassung*" der 7. Aufl. 1930. Vgl. U. Anm. [27]).

Man hat im Zusammenhang mit den Extremalaxiomen eine Reihe von Schwierigkeiten aufgewiesen. Diese beruhen zum Teil darauf, daß man, irregeführt durch ihre eigenartige Formulierung, den Extremalaxiomen (allerdings in einem unpräzisen Sinne) einen metamathematischen Charakter zugesprochen[2]) und daher geglaubt hat, daß sie keine echten Aussagen über die Grundbegriffe der Theorie darstellten. Zum anderen Teil werden die Schwierigkeiten durch eine zu enge oder schiefe Auffassungvon den Extremalaxiomen hervorgerufen, nach der diese Axiome bei der Anwendung allgemeiner axiomatischer Begriffsbildungen den anderen Axiomen nicht gleichgestellt werden können.

Um diese Fragen zu klären, werden wir uns zunächst allgemein mit der Darstellung einer axiomatischen Theorie in einer formalisierten Sprache[3]) befassen und dann die Frage behandeln, ob sich die Extremalaxiome ebenso wie die anderen Axiome in eine solche Sprache einordnen lassen . Wir werden zeigen, daß eine solche Einordnung, bei der die Extremalaxiome wie die anderen Axiome in der Objektsprache dargestellt werden, in der Tat möglich ist. Und diese Formalisierung gestattet es, die Rolle, die die Extremalaxiome in einem Axiomensystem spielen, genau zu beschreiben und die bisher gegen die Extremalaxiome vorgebrachten Bedenken zu beheben. Allerdings wird Eich ergeben, daß die üblichen formalisierten Sprachen eine völlig befriedigende Wiedergabe der Extremalaxiome nicht zulassen und daß daher der Aufbau einer stufenmäßig beweglichen Sprache für die Axiomatik wünschenswert erscheint.

§ I.

Um eine axiomatische Theorie zu charakterisieren, genügt es nicht, ein Axiomensystem dieser Theorie anzugeben. Es gehört vielmehr zu einer vollständigen Bestimmung eine Interpretation des Begriffs der Folgerung. Denn erst, wenn dieser Begriff festgelegt ist, können aus den Axiomen Lehrsätze gewonnen und so die Theorie aufgebaut werden, und erst dann erhalten auch die allgemeinen axiomatischen Begriffsbildungen wie Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Axiomen, Widerspruchslosigkeit und Vollständigkeit des Axiomensystems eine bestimmte Bedeutung. Wir werden im folgenden stets voraus-

---

[2]) Vgl. z. B. O. Helmer, Axiomatischer Aufbau der Geometrie (= Schristen des math. Sem. und des Inst. f. angew. Math. der Univ. Berlin II, 6), 1935.

[3]) Im Sinne von R. Carnap, Logische Syntax der Sprache. Wien 1934. Die Begriffsbildungen dieses Werkes werden im folgenden zugrunde gelegt.

setzen, daß diele Festlegung dadurch geschieht, daß die Axiome in einer formalisierten Sprache *S* dargestellt werden und der Folgerungsbegriff mit Hilfe des Folge-Begriffs der Sprache interpretiert wird.

Die Axiome einer Theorie sind stets aus zwei Arten von Zeichen (oder bei wortsprachlicher Formulierung: von Wörtern) zusammengesetzt: solchen, die aus anderen Zusammenhängen als bekannt vorausgesetzt werden, und solchen, die der Theorie eigentümlich sind und als Grundzeichen der Theorie bezeichnet werden. Als Zeichen erster Art treten in mathematischen Axiomensystemen in der Rege nur logische Zeichen (im engeren Sinne des Wortes) auf, in Axiomen systemen, die zu empirischen Wissenschaften gehören, außer solchen z. B. auch mathematische Zeichen. Zur Darstellung eines Axiomensystems werden wir daher eine Sprache *S* verwenden, in der Zeichen vorhanden sind, die als Zeichen der ersten Art genommen werden können. Als Grundzeichen, für die ja keine bestimmte Bedeutung vorausgesetzt wird, verwenden wir Variablenzeichen, deren Typen festgelegt sind. Axiome, und daher auch Axiomensysteme als Konjunktionen von Axiomen, sind dann Satzfunktionen: in diesen „Grundvariablen“, also von der Form ‚F_1(M)‘ wo ‚F_1‘ ein Prädikat und ‚*M*‘ Abkürzung für eine endliche Reihe von Variablenzeichen ist. Dementsprechend müssen auch die Lehrsätze als Satzfunktionen aufgefaßt werden, und wir nennen ‚F_2(M)‘ Lehrsatz der durch ein Axiomensystem ‚F_1(M)‘ charakterisierten Theorie, wenn die generelle Implikation

$$‚(M)\ (F_1(M)) \supset F_2(M)‘$$

ein analytischer Satz der Sprache *S* ist [4]).

‚M_1‘ sei Abkürzung für eine Reihe von Konstanten der zugrunde gelegten Sprache *S*. Wir sagen, M_1 sei ein Modell des Axiomensystem ‚F_1(M)‘, wenn der Satz ‚$F_1(M_1)$‘ in *S* analytisch ist.

Als Sprachen wollen wir logische Systeme mit Satz- und Funktionenkalkül voraussetzen, wie sie aus dem System der Principia Mathematica durch einige Modifikationen hervorgehen, dis Tarski in seinem Aufsatz „Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit ders Begriffe [5])“ angegeben und Carnap auch für die in seiner

---

[4]) Zu dieser Auffassungder Axiomatik vgl. R. Carnap, Abriß der Logistik. Wien 1929. § 30. Ferner: Untersuch. zur allg. Axiomatik. „Erkenntnis“ I, S. 303-307, 1930.

[5]) „Erkenntnis“ V, S. 80 f., 1935.

„Logischen Syntax der Sprache" untersuchten Sprachen angenommen hat (vor allem handelt es sich um die Ausschließung der verzweigten Typentheorie und besonderer Klassen- und Relationszeichen neben den Prädikaten).

Beispiele von Axiomensystemen. Das Axiomensystem der elementaren Arithmetik in der Peano schen Form mit „0", „*Nachfolger*" und „*natürliche Zahl*" als Grundbegriffen läßt sich als eine Satzfunktion in einer Individuenvariablen, einer 2- und einer 1-stelligen Prädikatvariablen 1. Stufe auffassen. Das Hilbert sche Axiomensystem der reellen Zahlen [6]) mit ‚+', ‚× ', ‚<' als Grundbegriffen kann als Satzfunktion in zwei 3- und einer 2-stelligen Prädikatvariablen 1. Stufe aufgefaßt werden. Während so zur Darstellung der Mehrzahl der gebräuchlichen Axiomensysteme Variable 1. Stufe ausreichen, gibt es doch einige wichtige Axiomensysteme, zu deren Wiedergabe Variable höherer Stufe nötig sind. Russell hat z. B. ein Axiomensystem der projektiven Geometrie angegeben, das als einzigen Grundbegriff die „*Klasse der Geraden*" enthält, wobei die Geraden als 2-stellige Relationen ihrer Punkte aufgefaßt sind [7]). Zur Darstellung dieses Axiomensystems braucht man daher eine 1-stellige Prädikatvariable 2. Stufe vom Typus ((0,0)).

Die Begriffsbildungen des Folgenden werden so getroffen, daß sie auf Axiomensysteme, deren Grundvariablen von höherer als 1. Stufe sind, angewendet werden können. Wir setzen aber stets voraus, daß die einzelnen Grundvariablen homogen sind, d. h. daß Argumente verschiedener Stellen, die zu einer Prädikatvariablen gehören, stets von gleichem Typus sind.

§ 2

Eine Reihe der wichtigsten Begriffsbildungen der Axiomatik beruht auf dem Isomorphie begriff. Nun wird die Isomorphie gewöhnlich nur für Spezialfälle definiert, nämlich für zwei 1-stellige und zwei 2-stellige Prädikate (Gleichmächtigkeit von Mengen und Isomorphie zwischen zwei 2-stelligen Beziehungen); jedoch ergeben die Definitionen der Isomorphie zwischen zwei n-stelligen Prädikaten und zwei Reihen von je m n_1-, n_2-, . . . , n_m-stelligen Beziehungen in ganz entsprechender Weise. Alle diese Definitionen lassen sich mit Hilfe des folgenden Begriffs des Korrelators definieren: Eine 2-stellige Beziehung K heißt ein Korrelator zwischen den beiden n-stelligen Beziehungen F und G, wenn K eineindeutig ist, wenn das Feld von F im Vorbereich von K und das Feld von G im Nachbereich *von* K enthalten ist, und wenn unter der Voraussetzung, daß x_1 zu y_1, x_2 zu y_2, . . ., x_n zu y_n in der Be-

---

[6]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Anhang VI.

7) s. R. C a r n a p , Abriß der Logistik, § 35 .

ziehung K steht, zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dann und nur dann die Beziehung F besteht, wenn zwischen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Beziehung G besteht:

$$\begin{aligned}&Kor\,(F, G) =_{df} \text{Eineind}\,(K).\ C`F \subset D`K\ .\ C`G \subset\ ?`K\\ &.\ (x_1)\,(y_1)\,(x_2)\,(y_2)\ldots(x_n)\,(y_n)\,[(K\,(x_1,y_1)\ .\ K\,(x_2,y_2)\ \ldots\\ &K\,(x_n,y_n)) \supset (F\,(x_1, y_2 \ldots, x_n) = G\,(y_1, y_2,\ldots, y_n))]\end{aligned}$$ [8])

Die Zuordnungen, die durch diese Isomorphiebegriffe zwischen zwei Beziehungen hergestellt werden, beziehen sich stets nur auf Eigenschaften der nächstniederen Stufenschicht, nämlich der Gliede der verglichenen Beziehungen. Nun haben wir gesehen, daß in einigen Axiomensystem en die Modelle von höherer als erster Stufe sind; in diesen Systemen werden nicht nur an die nächstniedere Stufenschicht der Modelle, sondern auch an noch tieferliegende Stufenschichten der Modelle Anforderungen gestellt. Um auch in diesen Fällen von Isomorphie sprechen zu können, brauchen wir eine gewisse Erweiterung des Isomorphiebegriffs. Wir wollen zunächst ein Beispiel betrachten, um zu zeigen, wie man diese Erweiterung in Übereinstimmung mit dem inhaltlichen Denken vorzunehmen hat.

Wir denken uns eine Sprache von der im § 1 beschriebenen Art, nur so, daß im Individuenbereich die natürlichen Zahlen und die Punkte einer Geraden der Euklidischen Geometrie, unter denen zwei Punkte ausgezeichnet seien, auftreten. Nun betrachten wir in dieser Sprache zwei Anordnungsrelationen: die *Kleinerbeziehung für ganze Zahlen* (Kl_g) *und eine Kleinerbeziehung für ganzzahlige Vektoren auf der Euklidischen Geraden* (Kl_v).

„Wenn man einen Augenblick nachdenkt, erkennt man, daß +1 und -1 Beziehungen sind", sagt Russell [9]), und dementsprechend wollen wir die ganzen Zahlen als Relationen zwischen natürlichen Zahlen auffassen. In der Mathematik pflegt man bekanntlich die ganzen Zahlen folgendermaßen auf den natürlichen aufzubauen: Man bildet zunächst Paare natürlicher Zahlen und definiert dann über dem Bereich dieser Paare eine „ Aquivalenz" (~), indem man $(a,b) \sim (c, d)$ mit $a + d = b + c$ definitionsgleich setzt. Diese „Aquivalenz" ist eine Gleichheitsbeziehung, und daher zerfällt die Gesamtheit aller Paare in

---

[8]) Diese Fassung des Korrelator-Begriffs weicht von den üblichen dadurch ab, daß zugelassen wird, daß im Vorbereich von K auch Elemente, die nicht zum Felde von F gehören, und im Nachbereich auch Elemente auftreten, die nicht im Felde von G liegen.

[9]) B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. Dtsch. von Gumbel u. Gordon. München, [2]1930.

fremde Klassen [10]) zueinander „äquivalenter" Paare. Und diese Klassen bezeichnet man dann als ganze Zahlen. Es ist nun zweckmäßig, die in der Mathematik übliche Definition ein wenig zu modifizieren, schon da das Operieren mit Paaren in der formalisierten Sprache unbequem ist. Wir setzen daher an die Stelle der „Äquivalenz" der Paare eine 4-stellige Gleichheitsbeziehung, indem wir festsetzen, daß zwischen vier natürlichen Zahlen a, b, c, d die Beziehung „Differenzengleichheit" besteht, wenn $a + d = b + c$ ist, und setzen an die Stelle der Klassen von Paaren 2-Stellige Relationen [11]) und bezeichnen diese als ganze Zahlen. Diese ganzen Zahlen sind dann eineindeutige Relationen zwischen natürlichen Zahlen, zu je zwei natürlichen Zahlen a_1 und b_1 gibt es genau eine derartige Relation G_1, in der a_1 zu b_1 steht, und in dieser Relation G_1 steht eine natürliche Zahl c zu einer zweiten d dann und nur dann, wenn zwischen a_1,b_1 c, d, Differenzengleichheit besteht. Die ganze Zahl -5 ist bei dieser Auffassung diejenige Relation, in der 0 zu 5, 1 zu 6, 2 zu 7, . . . steht, und + 5 ist die zu -5 konverse Relation. Wir nennen nun eine ganze Zahl G_1 kleiner als eine zweite G_2, wenn gilt: wenn a zu b in der Beziehung G_1 und c zu d in der Beziehung G_2 steht, so ist stets $a + d < b + c$.

Die Vektoren und die Kleinerbeziehung für Vektoren lassen sich durch eine ganz analoge Begriffsbildung definieren. Wir bezeichnen die beiden ausgezeichneten Punkte der Euklidischen Geraden mit P_0 und P_1 und betrachten die abzählbar unendliche Menge der Punkte P_k ($k = 0, 1, 2, ...$), für die P_{k+1} die Mitte zwischen P_k und P_{k+2} ist. Für die Punkte dieser Menge legen wir eine 4-stellige Gleichheitsbeziehung „Vektorgleichheit" fest, indem wir bestimmen, daß zwischen vier Punkten A, B, C, D der Menge Vektorgleichheit besteht, wenn die Strecken AB und CD dasselbe Vielfache der Einheitsstrecke P_0, P_1 sind und in der Orientierung übereinstimmen [12]). Die Vektoren definieren wir in ganz analoger Weise wie die ganzen Zahlen über der Menge der natürlichen Zahlen als 2-stellige Relationen über der genannten Punktmenge. Um die Kleinerrelation für diese Vektoren zu erhalten, setzen wir zunächst für die Strecken AB, CD, . . . folgendes fest: Jede Strecke, die nicht die Orientierung der Einheitsstredke hat,

---

[10]) Dies sind die „Abstraktionsklassen" in bezug auf die 2-stellige Gleichheitbeziehung „Aquivalenz von Paaren". Vgl. dazu R. Carnap, Abriß der Logistik, § 20.

[11]) Die Definition dieser Relationen läßt sich leicht formalisieren. Definitionen dieser Art stellen eine Verallgemeinerung des Verfahrens der Definition durch Abstraktionsklassen bildung auf beliebige 2_n-stellige Gleichheitsbeziehungen dar. (Eine Beziehung $F(a, b, c, d)$ heißt z. B. eine 4-tellige Gleichheitsbeziehung, wenn sie die drei Bedingungen

1. $(a)\,(b)\,(c)\,(d)\,(F(a, b, c, d) \supset F(a, b, a, b))$,
2. $(a)\,(b)\,(c)\,(d)\,(F(a, b, c, d) \supset F(c, d, a, b))$,
3. $(a)\,(b)\,(c)\,(d)\,(e)\,(f)\,(F(a, b, c, d) \,.\, F(c, d, e, f) :) \supset F(a, b, e, f))$ erfüllt.)

Eine ausführliche Behandlung findet dieses Definitions verfahren bei H. Scholz und H. Schweitzer, Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definition durch Bildung von Gleichheitsverwandschaften (= Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, hrsg. v. H. Scholz, Heft 3), Leipzig 1935

[12]) Wir unterscheiden die Strecke AB von der Strecke BA.

ist kleiner als jede Strecke, die die Orientierung der Einheitsstrecke hat; von zwei Strecken, die beide die Orientierung der Einheitsstrecke haben, ist die die kleinere, die das kleinere Vielfache der Einheitsstrecke ist; von zwei Strecken, die beide nicht die Orientierung der Einheitsstrecke haben, ist die die kleinere, die das größere Vielfache der Einheitsstrecke ist; die Strecken, die nicht die Orientierung der Einheitsstrecke haben, sind kleiner als jede Nullstrecke. Nun definieren wir: Ein Vektor V_1 heißt kleiner als ein Vektor V_2, wenn gilt: wenn A zu B in der Beziehung V_1 und C zu D in der Beziehung V_2 steht, so ist stets die Strecke AB kleiner als die Strecke CD.

Die Beziehungen Kl_g und Kl_g sind zwei Relationen 2. Stufe, zwischen denen die Art von Übereinstimmung besteht, die wir also „vollständige Isomorphie" bezeichnen werden. Wir wollen diese Übereinstimmung jetzt genauer analysieren.

Die beiden Beziehungen sind zunächst im gewöhnlichen Sinne zueinander isomorph, denn sie sind beide Reihenbeziehungen vom. Ordnungstypus $w^{-1} + w$. Es gibt also für sie einen Isomorphiekorrelator K_1 im Sinne der im Anfang dieses Paragraphen aufgestellt Definition, d. h. eine Relation, die die ganzen Zahlen und die Vektoren so eineindeutig auseinander abbildet, daß eine ganze Zahl dann und nur dann zu einer zweiten in der Beziehung Kl_g steht wenn das Bild der ersten zum Bild der zweiten in der Beziehtsteht. Wir können nun aber beim Vergleich von Kl_g und Kl_g noch einen Schritt weiter gehen, indem wir auch die Struktur der Feldelemente dieser beiden Beziehungen untersuchen. Die Feldelemente sind in beiden Fällen 2-stellige Beziehungen, das eine Mal über dem Bereich der natürlichen Zahlen, das andere Mal über einer abzählbar unendlichen Menge von Punkten einer Euklidischen Geraden. Diese beiden Mengen, die Felder der Feldelemente, lassen sich durch die Relation K_2 auseinander abbilden, die jeder natürlichen Zahl n den Punkt P_n zuordnet. Die Relation K_2 ist nun ein Isomorphiekorrelator zwischen gewissen ganzen Zahlen und gewissen Vektoren: zu jeder ganzen Zahl G_1 gibt es eineindeutig einen Vektor V_1, so daß K_2 Korrelator zwischen G_1 und V_1 ist. Es ist nun von großer Wichtigkeit, daß die so durch K_2 zwischen den ganzen Zahlen und den Vektoren induzierte Zuordnung mit der Zuordnung durch K_1 übereinstimmt: K_2 ist dann und nur dann Korrelator zwischen G_1 und V_1, wenn $K_1\,(G_1,V_1)$ beteht. Der *Isomorphiekorrelator* K_1 *zwischen* Kl_g *und* Kl_g *ist also nichts anderes als die Beziehung* $\underset{K_2}{\mathit{Kor}}$.

Allgemein werden wir nun zwei Relationen 2. Stufe $F(^2)$ und $G(^2)$ vollständig isomorph nennen, wenn 1. ein Isomorphiekorrelator im gewöhnlichen Sinne für sie existiert, 2. für die Felder ihrer Feldelemente, d. h. Also für gewisse Ausschnitte des Individuenbereichs der Sprache, eine Abbildungsrelation existiert, die ein Korrelator zwischen den Feldelementen von $F(^2)$ und $G(^2)$ ist, und 3. die beiden Zuordnungen, die so für die Feldelemente von $F(^2)$ und $G(^2)$, d. h. Also gewisse Gebilde 1. Stufe definiert sind, nicht unabhängig voneinander sind, sondern übereinstimmen [13a]). Im Vorstehenden haben wir an einem Beispiel die allgemeine Tatsache kennen gelernt, daß diese drei Forderungen für homogene Beziehungen $F(^2)$ und $G(^2)$ erfüllt sind, wenn eine Beziehung 1. Stufe $K(^1)$ (im Beispiel: K_2) mit der Eigenschaft existiert, daß die Relation $\underset{K(^1)}{\mathrm{Kor}}$ (im Beispiel: $\underset{K_2}{\mathrm{Kor}}$, das ist K_1) Isomorphiekorrelator zwischen $F(^2)$ und $G(^2)$ ist.

Wir nennen dann $K(^1)$ einen 2 - stufigen Korrelator. Wir definieren daher allgemein:

Zwei Relationen m-ter Stufe $F(^m)$ und $G(^m)$ heißen n - stufigisomorph (wobei $n < m$), wenn eine Relation K von der Stufe m + 1 existiert, die n-stufiger Korrelator zwischen $F(^m)$ und $G(^m)$ ist:

$$Ism_n\,(F(^m), G(^m)) =_{df} (\exists K)\,(\underset{K}{Kor_n}\,(F(^m), G(^m)))$$

Dabei ist ‚Kor_n' („n - stufiger Korrelator") durch fogende Rekursion definiert:

$$\underset{K(^m)}{Kor_1}\,(F(^m), G(^m)) =_{df} \underset{K(^m)}{Kor}\,(F(^m), G(^m))$$

$$\underset{K(^{m-n})}{Kor_{n+1}}\,(F(^m), G(^m)) =_{df} \underset{\underset{K(^{m-n})}{Kor_n}}{Kor}\,(F(^m), G(^m))$$

‚*Kor*' ohne Index ist dabei im Sinne der zu Anfang dieses Para
L
graphen aufgestellten, stufenmäßig nicht festgelegten Definition zu verstehen), die wir noch durch die Festsetzung

$$\underset{K(^{m+1})}{Kor_0}\,(F(^m), G(^m)) =_{df} K(^{m+1})\,(F(^m), G(^m))$$

ergänzen können.

[13a]) Vergleichen wir die Beziehung Kl_g nicht mit Kl_v, sondern mit deren Konverser, also der Größerrelation Gr_v für Vektoren, so ist 1. und 2. erfüllt, denn Kl_g und Gr_v sind im üblichen Sinne isomorph zueinander und die Feldelemente von Gr_v sind dieselben wie die von Kl_v. 3. ist dagegen nicht erfüllt.

Zwei Relationen n-ter Stufe heißen vollständig isomorph, wenn sie n-stufig isomorph sind [13b]):

$$Ism_v\,(F(^n), G(^n)) =_{df} Ism_n(F(^n), G(^n))$$

Zwei Modelle (also Konstantenreihen) M_1 und M_2 heißen vollständig isomorph , wenn Eich ihre Reihenglieder eineindeutig so einander zuordnen lassen, daß entsprechende Glieder von gleicher Stufe sind und wenn es eine Relation $K(^1)$ von erster Stufe gibt, die für je zwei entsprechende Glieder von n-ter Stufe n-stufiger Korrelator ist. Im Folgenden soll unter „Isomorphie" schlechthin stets vollständige Isomorphie verstanden werden.

§ 3

Da die vollständige Isomorphie zwischen n-stelligen Modellen (d. h. Reihen mit je n Gliedern) eine $2n$-stellige Gleichheitsbeziehung ist, lagen sich über dem Felde dieser Beziehung, d. h. der Gesamtheit der Konstanten der zugrunde gelegten Sprache, die als Bestandteile von Modellen auftreten können, n-stellige Relationen mit den folgenden Eigenschaften definieren [14]): zu jedem Modell existiert genau eine solche Relation, die von den Konstituenten des Modells erfüllt wird, und eine solche Relation wird von den Konstituenten zweier verschiedener Modelle dann und nur dann erfüllt, wenn die Modelle vollständig isomorph sind. Die so festgelegten Relationen bezeichnen wir als Strukturen und sagen, daß das Modell M_1 die Struktur S_1 besitzt, wenn ‚S_1 (M_1)' analytisch ist.

Betrachten wir nun eine Struktur und die Modelle, die diele Struktur besitzen, so ist es möglich, daß jedes dieser Modelle zu einem echten Teil von sich isomorph ist, daß also jedes Modell einen echten Teil enthält, der dieselbe Struktur besitzt. Ein Beispiel einer solchen Struktur, die wir als teilig bezeichnen wollen, ist die Struktur der Reihen vom Ordnungstypus w, zu der die Kleinerrelation für natürliche Zahlen gehört [15]). Wir definieren: Eine Struktur S heißt teilig , wenn ‚$(\exists M)\,(\exists N)\,(S\,(M)\,.\,S\,(N)\,.\,M \subset N$

[13b]) Kl_g und Gr_v und ebenso Kl_g und Gr_g (vgl. Anm. 13a) sind einstufig isomorph, aber nicht zweistufig isomorph, und daher nicht vollständig isomorph.

[14]) Die Strukturen sind Relationen der in Anm. [11]) besprochenen Art.

[15]) „Reihe" im Sinne von A. N. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, I-III, Cambridge [2]1925-1927. * 204.

. $M \neq N$)‘ analytisch ist [16]). Modelle, die dieselbe teilige Struktur besitzen, lassen sich stets auf echte Teile voneinander abbilden. Strukturen, deren Modelle nicht zu echten Teilen von sich isomorph sind, bezeichnen wir als unteilig. Beispiele für unteilige Strukturen erhält man, wenn man die Kleinerrelation für natürliche Zahlen auf endliche Abschnitte mit einer festen Elementenzahl beschränkt. Wir definieren: Eine Struktur S heißt unteilig, wenn $\sim(\exists M)\ (\exists N)\ (S(M)\ .\ S\ (N)\ .\ M \subset N\ .\ M \neq N)$‘ analytisch ist.

Eine Satzfunktion ‚F (M)‘ nennen wir strukturell, wenn sie it einem Modell auch jedem zu ihm isomorphen zukommt, genauer: wenn ‚$(M)\ (N)\ (F\ (M)\ .\ Ism_v\ (M, N) \supset F\ (N))$: analytisch ist [17]). Ist ‚$F(M)$‘ eine strukturelle Satzfunktion und S_l eine Struktur, so erfüllen entweder alle Modelle, die die Struktur S_1 besitzen, die Satzfunktion ‚$F_1\ (M)$‘, oder es gibt unter den Modellen, die die Struktur S_l besitzen, keines, das ‚$F_1\ (M)$‘ befriedigt. Je nachdem sagen wir, daß die Struktur S_l zu ‚$F_1\ (M)$‘ (oder kurz: zu ‚F_l‘) gehört oder nicht, indem wir definieren: Eine Struktur gehört zu ‚F‘, ‚$S \subset F$‘ analytisch ist.

Die üblichen Axiomensysteme in den exakten Wissenschaften enthalten nur strukturelle Axiome, und wir setzen daher für das Folgende voraus, daß wir es nur mit strukturellen Axiomensystemen zu tun haben. Zu einem strukturellen Axiomensystem gehört dann immer eine bestimmte Zahl von Strukturen. Wir ordnen nun jedem Axiomensystem ‚$F(M)$‘ sein „Strukturbild“ zu, das ist die Pfeilfigur [18]) der Relation »*echte Teilstruktur, beschränkt auf die zu* ‚$F(M)$‘ *gehörigen Strukturen*« (‚Ts_F‘). Dabei nennen wir eine Struktur S echte Teilstruktur einer zweiten T, wenn S von T verschieden ist und jedes Modell, daß die Struktur S befitzt, zu einem echten Teil jedes Modells, daß die Struktur T besitzt, isomorph ist; das ist dann und nur dann der Fall, wenn es ein Modell M von der Struktur S und ein Modell N von der Struktur T gibt, so daß M in N enthalten ist, und wir definieren daher: S heißt echte Teilstruktur von T, wenn ‚$S \neq$ T‘ und ‚$(\exists M)\ (\exists N)$

---

[16]) Sind $u, v, \ldots, w, F, G, \ldots, H$‘ und $x, y, \ldots, z, J, K, \ldots, L$‘, wo die ‚$u$‘ ..., ‚$z$‘ Indviduen-, die ‚$F$‘, . . ., ‚$L$‘ Prädikatvariablen seien, zwei Variablenreihen, die durch ‚M‘ und ‚N‘ abgekürzt sind, so ist $M \subset N$‘ Abkürzung für ‚$u = x\ .\ v = y\ .\ \ldots\ .\ w = z\ .\ \mathrm{F} \subset \mathrm{J}\ .\ \mathrm{G} \subset \mathrm{K}\ .\ \ldots\ .\ H \subset L$‘.

[17]) Vgl. R. Carnap , Abriß der Logistik. § 22d.

[18]) H. Behmann , Mathematik und Logik, Leipzig-Berlin 1927, S. 41 ff.; und R. Carnap, Abriß der Logistik, § 11 f.

$(S(M) \,.\, T(N) \,.\, M \subset N)$‘ analytisch sind. S heißt eine Anfangsstruktur von ‚F‘, wenn S dem Vor- und nicht dem Nachbereich von Ts_F angehört, eine Endstruktur von ‚F‘, wenn S dem Nach- und nicht dem Vorbereich von Ts_F angehört, eine isolierte Struktur von ‚F‘, wenn S zu ‚F‘ gehört, jedoch dem Feld von Ts_F nicht angehört. Die Anfangsstrukturen und isolierten Strukturen von ‚F‘ werden zusammenfassend als Minimalstrukturen von ‚F‘, die Endstrukturen und die isolierten Strukturen von ‚F‘ zusammenfassend als die Maximalstrukturen von ‚F‘ bezeichnet.

Als Beispiel betrachten wir das folgende Axiomensystem:

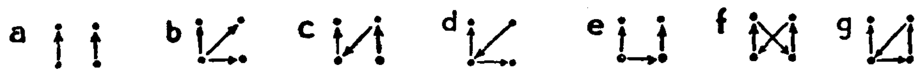
a1 *R* ist mehreindeutig $(x)\,(y)\,(z)\,(R\,(x, y) \,.\, R\,(x, z) \supset y = z)$

a2 R ist asymmetrisch $(x)\,(y)\,((Rx, y) \supset \ldots R\,(y, x))$

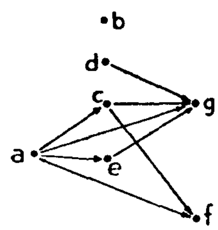
a3 *R* ist irreflexiv $(x)\,(\sim R\,(x, x))$

a4 das Feld von *R* besteht aus 4 Elementen $C'\,R \in 4$

Da die Relationen gleicher Struktur gleiche Pfeilfiguren, Relationen verschiedener Struktur verschiedene Pfeilfiguren haben, können wir die Strukturen, die zu dem Axiomensystem gehören, durch die Pfeilfiguren charakterisieren, die durch die Axiome a1-a4 gekennzeichnet werden. Diese Pfeilfiguren müssen aus 4 Punkten bestehen (a4), jeder Punkt darf Endpunkt höchstens eines Pfeils sein (a1), es dürfen keine Doppelpfeile [18]) (a2) und keine Rückkehrpfeile [18]) (a;) auftreten. Die Relationen, die Modell des Axiomensystems sind, müssen also eine der folgenden sieben Pfeilfiguren haben:



Das Strukturbild des Axiomensystems hat daher die Gestalt:



Anfangsstrukturen sind also *a* und *d*, Endstrukturen *g* und *f*, isolierte Struktur *b*, Minimalstrukturen *a*, *b* und *d*, Maximalstrukturen *b*, *f* und *g*.

§ 4

Wir verstehen , zunächst inhaltlich formuliert, unter einem zu einer strukturellen Satzfunktion ‚$F(M)$‘ gehörigen Maximalaxiom eine Satzfunktion:

„*es gibt keine Erweiterung N von M, so daß F* (*N*) *gilt*“,
und unter einem zu ‚*F*(*M*)‘ gehörigen Minimalaxiom eine Satzfunktion:

„*es gibt kein N, so daß F* (*N*) *gilt und M eine Erweiterung von N ist*“.

Um die Extremalaxiome in einer formalisierten Sprache, wie wir sie voraussetzen, darzustellen, müssen wir zunächist den Begriff der „Erweiterung“ wiedergeben. Es entsteht nun die Frage, ob es zweckmäßig ist, ein Modell N_1 nur dann eine Erweiterung des Modells M_1 zu nennen, wenn M_1 ein echter Teil von N_1 ist, oder allgemeiner auch dann, wenn N_1 einen echten Teil T_1 enthält, der zu M_1 nur isomorph ist. Der Gebrauch des Wortes „Erweiterung“ in der Praxis spricht für die zweite allgemeinere Fassung. In den Extremalaxiomen wird nun aber nur von der Existenz von Erweiterungen gesprochen, und obschon die beiden angedeuteten Erweiterungsbegriffe keineswegs identisch sind, so ist es, da der Satz $(M)\ [(\exists N)\ (\exists T)\ (T \subset N\ .\ T \neq N\ .\ Ism_v\ (M, T)) \equiv (\exists N)\ (M \subset N\ .\ M \neq N)]$‘ beweisbar ist, gleichgültig, für welche Fassung man sich entscheidet, solange man ausschließlich von der Existenz von Erweiterungen spricht. Wir wählen daher für das Folgende die einfachere Fassung mit der Inklusion.

Wir müssen bei der Formalisierung des Erweiterungsbegriffs nun noch eine weitere Unterscheidung machen. Bei der inhaltlichen Verendeng dieses Begriffs läßt man zuweilen zu, daß das erweiterte System zum Ausgangssystem isomorph ist, es kommt aber auch vor, daß man diese Isomorphie ausschließen will. Nennen wir N_1 eine Erweiterung von M_1, wenn M_1 echter Teil von N_1 ist, so wird damit der erste Gebrauch erfaßt; wenn nämlich M_1 und N_1 teilige Struktur besittzen, so können sie isomorph sein, obwohl N_1 eine Erweiterung an M_1 ist. Wenn wir sichern wollen, daß die Strukturen von N_1 und M_1 wirklich verschieden sind, so müssen wir die Forderung, daß M_1 und N_1 nicht isomorph sind, in die Definition der Erweiterung aufnehmen. Wir unterscheiden daher die beiden Gebrauchsweisen als „Modellerweiterung“ (‚Erw_m‘) und „Strukturerweiterung“ (‚Erw_s‘) und definieren:

$$Erw_m\ (N; M) =_{df}\ M \subset N\ .\ M + N$$
$$Erw_s\ (N;M) =_{df}\ M \subset N\ .\ {\sim}Ism_v\ (M, N)$$

Je nachdem mit welchem Erweiterungsbegriff wir ein Extremalaxiom aussprechen, erhalten wir ein „Extremalmodell-„

oder „Extremalstrukturaxiom“. Wir unterscheiden daher die folgenden Arten von Extremalaxiomen, die zu einer Satzfunktion ‚$F\ (M)$‘ gehören:

Maximalmodellaxiom:

$$Max_m\ (F; M) =_{df} \sim(\exists N)\ (M \subset N\ .\ M \neq N\ .\ F\ (N))$$

Maximalstrukturaxiom:

$$Max_s\ (F; M) =_{df} \sim(\exists N)\ (M \subset N\ .\ \sim Ism_v\ (M, N)\ .\ F\ (N))$$

Minimalmodellaxiom:

$$Min_m\ (F; M) =_{df} \sim(\exists N)\ (N \subset M\ .\ M \neq N\ .\ F\ (N))$$

Minimalstrukturaxiom:

$$Min_s\ (F; M) =_{df} \sim(\exists N)\ (N \subset M\ .\ \sim Ism_v\ (M, N)\ .\ F\ (N))$$

Besitzt ein Modell M_1 eine teilige Struktur S_1, so gibt es stets ein Modell N_1, das ebenfalls die Struktur S_1 besitzt und eine Modellerweiterung von M_1 ist. Daher kann eine teilige Struktur nicht zu einem Axiomensystem gehören, in dem ein Extremalmodellaxiom auftritt. Während also die Struktur S_1 von M_1, zugleich auch die Struktur einer Modellerweiterung von M_1 sein kann, besitzen die Strukturerweiterungen von M_1 stets von S_1 verschiedene Struktur. Besitzt ein Modell M_2 eine unteilige Struktur S_2, so ist jede Modellerweiterung von M_2 Strukturerweiterung und umgekehrt. Wenn zu einem Axiomensystem, das durch ein Extremalaxiom abgeschlossen ist, nur unteilige Strukturen gehören, so ist es also gleichgültig, ob wir das Extremalaxiom als Extremalmodell- oder als Extremalstrukturaxiom formulieren. Dieser Fall liegt z. B. im Hilbertschen Vollständigkeitsaxiom vor, da die Struktur der Modelle der Euklidischen Geometrie unteilig ist. In solchen Fällen wollen wir uns für das einfachere Extremalmodellaxiom entscheiden; wir formulieren daher das Hilbert sche Vollständigkeitsaxiom als Maximalaxiom.

Die Rolle, die ein Extremalaxiom in einem Axiomensystem spielt, kann an dem Strukturbild des Axiomensystems veranschaulicht werden. Fügen wir etwa zu einem Axiomensystem ‚$F_1\ (M)$‘ ein Minimalstrukturaxiom hinzu, so genügen dem neuen Axiomensystem, also der Konjunktion ‚$F_1\ (M)\ .\ Min_s\ (F_1; M)$‘, von den Modellen, die ‚F_1‘ erfüllen, nur diejenigen, zu deren Struktur es keine Teilstruktur gibt, die ebenfalls zu ‚F_1‘ gehört. Das sind gerade diejenigen Modelle, deren Strukturen die Minimalstrukturen von ‚F_1‘ sind. Zu ‚$F_1\ (M)\ .\ Min_s\ (F_1; M)$‘ gehören also die Minimalstrukturen von ‚F_1‘. Entsprechend gehören zu ‚$F_1\ (M)\ .\ Min_m\ (F_1; M)$‘die unteiligen Minimalstrukturen von ‚F_1', zu ‚F_1 (M) . Max_s (F_1; M) die sämtlichen Maximalstrukturen von ‚F_1'und zu ‚F_1 (M) . Max_m (F_1; M)' die unteiligen Maximalstrukturen von F_1. *Dadurch, daß man zu einem Axiomensystem ein zugehöriges Extremalaxiom hinzufügt, wählt man also unter den Strukturen, die zu dem Axiomensystem gehören, Extremalstrukturen aus.*

Beispiele : Die Hilbert schen Vollständigkeitsaxiome 1. der Euklidischen Geometrie und 2. der Arithmetik der reellen Zahlen [19]) lassen sich als Maximalmodellaxiome, 3. das Beschränktheitsaxiom in Fraenkels Axiomensystem der Mengenlehre [20]) läßt sich als Minimalmodellaxiom formulieren.

4. Das Beispiel des vorigen Paragraphen besitzt nur endliche, also unteilige Strukturen, so daß wir auch hier die einfacheren Extremalmodellaxiome verwenden wollen. Fügen wir zu den Axiomen ‚a1-a4 (R)` das Minimalaxiom ‚Min_m (a1-a4; R)' hinzu, so gehören zu dem entstehenden Axiomensystem die Strukturen *a*, *b* und *d*, fügen wir das Maximalaxiom Max_m (a1-a4; R)' hinzu, so *b*, *f* und *g*; fügen wir beide Extremalaxiome hinzu, so ist *b* die einzige Struktur, die zu dem so entstehenden Axiomensystem gehört.

5. Folgende Axiome bilden ein Axiomensystem der elementaren Arithmetik:

*b*i R ist endlos $(x)\ (y)\ [R\ (x, y) \supset\ (\exists z)\ (R\ (y, z))]$

*b*2 R ist eineindeutig $(x)\ (y)\ (z)\ [(R\ (x, y)\ .\ R\ (x, z) \supset\ y = z)$

$(R(x,y)\ .\ R(z,y) \supset x = z)]$

*b*3 R besitzt genau ein Anfangselement (D'R—?'R) $\in 1$

*b*4 Min_s (*b*2-*b*3; R)

Die Modelle von ‚*b*1-*b*3 (R)' enthalten zunäcist alle Eine Progreffion [21]) und außerdem 0 bis unendlich viele Zyklen [22]) mit 1 bis unendlich vielen Elementen. Der Beginn des Strukturbildes von ‚*b*1-*b*3 (R) ' läßt sich daher folgendermaßen andeuten (wir deuten die Struktur der Progressionen, Prog, durch ‚P', die Struktur der Zyklen mit n Elementen, Zyk_n, durch ‚n' an; z. B. bezeichnet ‚$P + r$' dielenige Struktur, die aus einer Progression und einem eingliedrigen Zykel besteht; die Transitivitätspfeile sind der übersichlichkeit halber fortgelassen):

Prog ist also die einzige Minimalstruktur von ‚*b*1-*b*3 (R)'; da sie teilig ist, kann sie nur durch ein Minimalstrukturaxiom charakterisiert werden. Zu ‚*b*1-*b*4 (R)' gehört also in der Tat *Prog* als einzige Struktur. Den Axiomen ‚*b*1-*b*2 (R)' genügen außer den Modellen von ‚*b*1-*b*3 (R)' einzelne Zyklen und Kombinationen aus endlich oder unendlich vielen Zyklen. Minimalstrukturen des Axiomensystems ‚*b*1-*b*2 (R)' sind daher außer *Prog* die Zyk_n (n = 1,2,3, ..., $\neq \infty$). Da die Zyk_n unteilige Strukturen sind, hat das Axiomensystem un-

---

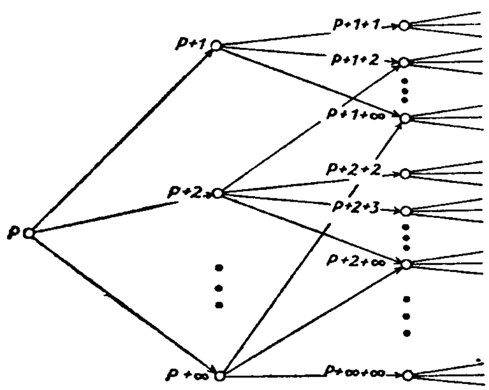
[19]) f. Anm. [6]).

[20]) A. Fraenkel, Einführung in die Mengenlehre, Berlin [3]1928.

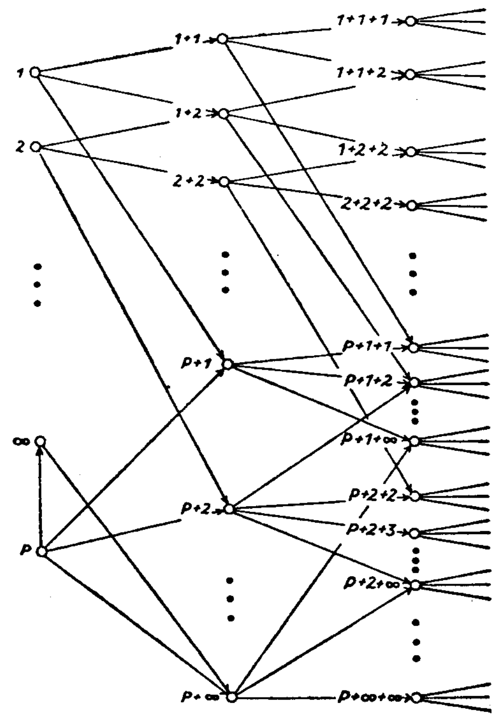
[21]) Principia Mathematica, *122, *263

[22]) Unter einem Zykel mit n Elementen verstehen wir eine eineindeutige Relation, deren Feld aus Einer geschlossenen R-Familie mit n Elementen besteht. Vgl. R. Carnap , Abriß der Logistik, § 25C. Im Grenzfall $n = \infty$ entsteht eine eineindeutige, anfangs- und endlofe Relation, die aus Einer offenen R-Familie besteht.

endlich viele unteilige und eine teilige Minimalstruktur. Daher gehören zu dem Axiomensystem ‚*b*1-*b*2 (*R*) . Min_s (*b*1-*b*2; *R*)‘ die Zyk. mit endlichem *n* und *Prog*, zu ‚*b*1-*b*2 (*R*) . Min_n (*b*1-2; *R*)‘ nur diele Zyk_n als Strukturen.



Strukturbild von ‚b_1—b_3 (R)‘.



Strukturbild von ‚b_1—b_2 (R)‘.

§ 5

Um unsere Auffassung von den Extremalaxiomen genauer zu kennzeichnen, heben wir die folgenden Punkte hervor [23]):

1. ist ein Axiomensystem aus einer Reihe ‚A_1 (*M*)‘, ‚A_2 (*M*) ‘, . . ., ‚A_n (*M*) ‘ von Axiomen und einem Extremalaxiom zusammengesetzt, so nennen wir jene Reihe das Rumpf - Axiomensystem. Wir haben bisher nur den Fall betrachtet, daß Axiomensysteme aus, einem Rumpf-Axiomensystem und einem zu diesem gehörigen Extremalaxiom bestehen . Wir sagen in diesem Fall, daß das Axiomensystem durch ein Extremalaxiom „abgeschlossen“ sei. Im allgemeinen soll jedoch zugelassen werden, daß in Axiomensystemen Extremalaxiome auftreten, die zu ganz beliebi-

[23]) Die hier auftretenden Probleme sind weiterverfolgt in F. Bachmann, Die Fragen der Abhängigkeit und der Entbehrlichkeit in Axiomensystemen, in denen ein Extramalaxiom auftritt. Erscheint in den Veröffentlichungen des Ersten Kongresses für wissenschaftliche Philosophie, Paris 1935.

gen Satzfunktionen gehören. Einen ersten Schritt in der Richtung dieser allgemeinen Auffassungbrachte die Beobachtung, daß in gewissen Extremalaxiomen Axiome entbehrt werden können, als Baldus [24]) zeigte, daß im Hilbert schen Vollständigkeitsaxiom das Parallelenaxiom nicht genannt zu werden braucht. Allgemeiner kann das Problem der Entbehrlichkeit von Axiomen in Extremalaxiomen so formuliert werden: unter welchen Bedingungen ist ein durch ein Extremalaxiom abgeschlossenes Axiomensystem aequivalent mit einem Axiomensystem, das aus dem gleichen Rumpf-Axiomensystem und einem Extremalaxiom besteht, in dem nur ein Teil der Axiome des Rumpf-Axiomensystems auftritt? Monomorphe Axiomensysteme, wie das der Euklidischen Geometrie, werden widerspruchsvoll, sobald man mehr Axiome aus dem Extremalaxiom fortläßt, als entbehrlich sind. Es lassen sich aber leicht widerspruchslose Axiomensysteme angeben, in denen im Extremalaxiom weniger Axiome als im Rumpf-Axiomensystem auftreten und die mit dem zugehörigen abgeschlossenen Axiomensystem nicht aequivalent sind. Alle derartigen Axiomensysteme sind zwar selbst nicht durch ein Extremalaxiom abgeschlossen, enthalten aber noch einen durch ein Extremalaxiom abgeschlossenen Teil. Es gibt aber auch widerspruchslose Axiomensysteme, in denen im Extremalaxiom mehr Axiome als im Rumpf-Axiomensystem genannt werden, ohne daß man dabei die überzähligen weglassen darf in dem Sinne, daß das entstehende Axiomensystem dem ursprünglichen aequivalent bleibt.

2. Es muß sogar zugelassen werden, daß in einem Extremalaxiom Negationen von Axiomen des Rumpf-Axiomensystems auftreten. Will man nämlich zeigen, daß *ein Axiom A_n in einem durch ein Extremalaxiom abgeschlossenen Axiomensystem von allen übrigen Axiomen einschließlich des Extremalaxioms unabhängig* ist, so muß man — nach einem bekannten Unabhängigkeitskriterium — zeigen, daß das Axiomensystem, das aus ‚A_1 (M) . A_2 (M) .... $A_{n\text{-}1}$. (M) $\sim A_n$ (M)‘ und dem zu ‚A_1 (M) . A_2 (M) ..... A_n (M)‘ gehörigen

[24]) R. Baldus, Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom. Math. Ann. 100, S. 321-333, 1928. — Die Formulierungen es Vollständigkeitsaxioms bei Baldus erwecken den Anschein, als sei dieses Axiom nicht eine Satzfunktion, sondern eine (geschlossene) Aussage über alle elle des Axiomensystems. Dann wäre das Axiom aber ein entscheidbarer und sogar (wenn man nicht, wie Baldus es merkwürdigerweise an einigen Stellen tut, ein Stetigkeitsaxiom in das Vollständigkeitsaxiom aufnimmt) ein kontradiktorischer Satz.

Extremalaxiom zusammengesetzt ist, widerspruchsfrei ist. Baldus hat solche Unabhängigkeitsbeweise zu Unrecht für unmöglich erklärt, da er verlangte, daß im Extremalaxiom nur Axiome des Rumpf-Axiomensystems auftreten dürften.

Es ist wichtig, zu beachten, daß allgemein ein zu einer Satzfunktion ‚F (M)' gehöriges Extremalaxiom nicht aussagt, daß die ihm genügenden Modelle die „kleinsten" oder die „größten" sind, die ‚F (M)' erfüllen. Von den beiden Aussagen 1. M_1 genügt ‚F (M)' und 2. es gibt kein M_2, das ;„größer" ist als M_1 und das auch ‚F (M)' genügt, spricht ein Maximalaxiom nur 2. aus. Es ist aber möglich, daß die Modelle eines Axiomensystems, in dem ein Extremalaxiom auftritt, Axiome, die in dem Extremalaxiom genannt werden, gar nicht erfüllen, — wenn nämlich diese Axiome nicht, außerdem im Rumpf-Axiomensystem auftreten. Darauf beruht es, daß Axiomensysteme der eben genannten Art, wie man sie zu Unabhängigkeitsbeweisen untersuchen muß, in der Tat Modelle besitzen können. Die vierdimensionale Euklidische Geometrie erfüllt z. B. alle Axiome des Hilbert schen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie (*I 1-6*, *8*,*II-V1*) außer dem Axiom vom Ebenen-Schnitt (*I 7*: zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, habei zwei Punkte gemein) und besitzt keine Erweiterung, die alle Axiome des Axiomensystems mit Einschluß des Axioms vom Ebenen-Schnitt (*I-V1*) erfüllt, da sie nicht durch eine dreidimensionale Euklidische Geometrie überbaut werden kann. Es gibt also Modelle des Axiomensystems ‚*I 1-6 . ~I 7 .I 8 . II-V1* (M) . Max_m (*I-V1*; M)'. Daher ist nach dem angeführten Kriterium das Axiom vom Ebenen-Schnitt im Hilbert-Axiomensystem unabhängig. Entsprechend wird die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms im Hilbert - Axiomensystem durch die Tatsache erwiesen, daß es nicht-archimedische Modelle gibt, die keine archimedischen Erweiterungen besitzen [25]).

[25]) Läßt man aber das Archimedische Axiom im Maximalmodellaxiom fort, so entsteht ein unerfüllbares Axiomensystem; läßt man es überdies noch in dem Rumpf-Axiomensystem fort, so ist das so entstehen de (nochmals verschärfte) Axiomensystem ‚*I-IV* (M) . Max_m (*I-IV*; M)' a fortiori unerfüllbar — im Gegensatz zu dem folgenden Satz von P. Finsler (Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn Baer , Math. Ztschr. 27, S. 542): „Ergänzt man die Hilbert schen Axiomgruppen I bis IV durch das Vollständigkeitsaxiom, läßt aber das Archimedische Axiom beiseite, so erhält man eine Geometrie, die logisch nicht widerspruchsvoll ist, aber einen so paradoxen Charakter zeigt, daß man bei ihr leicht zu scheinbaren Widersprüchen gelangt"

3. Die Aussage, daß es zu einem Modell M_1 kein „größeres“ gibt, kann in speziellen Fällen noch in ganz verschiedener Weise anders gefaßt werden, als es durch unsere Formulierung der Extremalaxiome geschehen ist. In monomorphen, abgeschlossenen Axiomen-systemen ist z. B. mit unseren Maximalaxiomen die positive Forderung aequivalent, daß jedes Modell des Rumpf -Axiomensystems in M isomorph abgebildet werden kann [26]). Eine von unserer abweichende Fassung des Erweiterungsbegriffs verwendet Bernays [27]) in der „linearen Fassung“ des Hilbertschen Vollständigkeitsaxioms, indem er fordert, daß „*es wenigstens eine alte Gerade gibt, auf der wenigstens ein neuer Punkt liegt*“. Dies Axiom ist nicht vom Typ unserer Maximalaxiome, da es eine zusätzliche Verknüpfung zwischen Ausgangsmodell und Erweiterung verlangt [28]).

4. Die Modelle eines Axiomensystems, das durch ein Maximalaxiom abgeschlossen ist, besitzen eine gewisse Vo1ständigkeitseigenschaft, da sie nicht erweitert werden können, ohne daß Axiome des Axiomensystems verletzt werden. Es entsteht nun die Frage, wie sich diese Vollständigkeit der Modelle zu der Vollständigkeit des Axiomensystems verhält, wie man sie in der allgemeinen Axiomatik betrachtet. Wählen wir als axiomatischen Vollständigkeitsbegriff die Monomorphie (zu dem Axiomensystem gehört genau Eine Struktur), so ist das Verhältnis dies:

Aus der Monomorphie eines Axiomensystems folgt trivialerweise, daß seine Modelle (im Sinne der Strukturerweiterung) nicht mehr so erweitert werden können, daß alle Axiome gültig bleiben. Umgekehrt folgt aber aus der Nicht-Existenz von Erweiterungen für die Modelle eines Axiomensystems keineswegs die Monomorphie des Axiomensystems. Beispiele dafür wurden zuerst von Baldus [24]) und Noether [24]) angegeben. Diese Tatsache läßt sich aber bereits durch so einfache Axiomensystem wie, a1-a4 (R) . Max_m (a1-a4; R)‘ belegen; „vollständige“ Modelle dieses Axiomensystems sind die

---

[26]) F. Bachmann, Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik mit besonderer Beziehung auf Frege , Dedekind und Russell (= Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, hrsg. v. H. Scholz , Heft 1), Leipzig 1934, § 14

[27]) in D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, [7]1930, § 8.

[28]) Daher müssen auch die Fragen, ob ein Axiom im räumlichen oder im linearen Vollständigkeitsaxiom entbehrt werden kann, scharf unterschieden werden.

Modelle der drei Strukturen *b*, *f* und *g*. Daß aus der „Vollständigkeit“ der Modelle nicht die Monomorphie des Axiomensystems folgt, beruht auf der Tatsache, daß im allgemeinen die Axiomensysteme unvergleichbare Modelle besitzen, d. h. solche , von denen weder das eine in das andere noch umgekehrt isomorph abgebildet werden kann. Ein durch ein Maximalaxiom abgeschlossenenes Axiomensystem ist monomorph, wenn es unter den Modellen des Rumpf-Axiomensystems ein solches gibt, in das hinein alle anderen (die nicht einer endlos wachsenden Strukturreihe [23]) des Rumpf-Axiomensystems angehören) isomorph abgebildet werden können. Dies ist z. B. bei der Euklidischen Geometrie der Fall.

§ 6.

Gegen unsere Formalisierung der Maximalaxiome kann der Einwand erhoben werden, daß unsere Fassung des Erweiterungsbegriffs, die verlangt, daß ein Modell und seine Erweiterungen stets stufenmäßig übereinstimmen, zu eng ist und daß daher unsere Fassung der Maximalaxiome, die nur die Existenz stufengleicher Erweiterungen ausschließt, der inhaltlichen Fassung, die keine Stufen-Beschränkungen kennt, gegenüber zu schwach ist. Denn man trägt im inhaltlichen Denken in der Tat keine Bedenken, Systeme höherer Stufe als Erweiterungen zuzulassen , und es ist sogar lehr gebräuchlich, Bereiche dadurch zu erweitern, daß man einen neuen Bereich aufbaut, dessen Elemente durch ein- oder mehrmalige Klassen bildung aus den Elementen des Ausgangsbereichs gewonnen werden. Es sei nur an zwei klassische Beispiele aus der Mathematik erinnert: man „erweitert“ den Körper der rationalen zum Körper der reellen Zahlen, indem man Klassen von Fundamentalfolgen mit rationalen Zahlen als Elementen betrachtet, und man „erweitert“ eine Geometrie in einem endlichen Raumstück zu einer vollen räumlichen Geometrie, indem man zeigt, daß gewisse Klassen von Punkten, Geraden und Ebenen des Raumstücks den Axiomen einer räumlichen Geometrie genügen.

In der Tat ist dies ein ernster Einwand. Es ist zwar wohl möglich, von der größeren Reichhaltigkeit, die durch die Zulassung von Erweiterungen höherer Stufe erfaßt wird, abzufehen, wenn die Mittel der zugrunde gelegten Sprache, insbesondere der Individuenbereich, genügend reich ist. Wenn jedoch die Sprache eine gewisse Armut aufweist, so ist es durchaus möglich, daß zwar Erweiterungen höherer Stufe existieren, solche gleicher Stufe aber nicht. Wenn wir z. B. das Hilbert sche Axiomensystem der Euklidischen Geometrie als eine

Satzfunktion 1. Stufe in einer Sprache mit abzählbar unendlichem Individuenbereich aussprechen, so kann es Modelle geben, die nur Erweiterungen höherer Stufe besitzen. Wenn wir das Vollständigkeitsaxiom dann in der in § 4 vorgeschlagenen Weise interpretieren, so wird es von diesen Modellen erfüllt, obgleich sie nicht stetig sind.

Wir stehen hier vor der Schwierigkeit, daß Eich der inhaltliche Erweiterungsbegriff, der zuläßt, daß ein erweiterter Bereich stufenmäßig beliebig hoch über dem Ausgangsbereich liegt, in den üblichen logischen Systemen nicht formalisieren läßt. Formalisierbar ist nur die Aussage, daß Erweiterungen einer bestimmten höheren Stufe nicht existieren. Herr Tarski hat z. B. vorgeschlagen [29]), *N* eine Erweiterung von *M* zu nennen, wenn *M* auf einen echten Teil von *N* abgebildet werden kann und die Stufe von *N* um 1 höher ist als die von *M*. Diese Fassung scheint zwar in den praktisch wichtigen Fällen das Gewünschte zu treffen. Es lassen sich aber leicht Beispiele dafür angeben, in denen die Erweiterungen erst in noch höheren Stufen gefunden werden können.

Um die angegebenen Schwierigkeitzn zu überwinden, müßte man an der Methode der stufenmäßig starren Darstellung der Axiomensysteme, die wir bisher zugrunde gelegt haben, zu einer ethode stufenmäßig beweglicher Darstellung übergehen. Man kann hierbei zwei verschiedene Wege einschlagen. Bei der Wahl des ersten Weges behält man die übliche Sprachform mit Typeneinteilung bei, bei der Wahl des zweiten gibt man sie auf, geht also zu einer ganz neuartigen Sprachform über, kommt aber dabei, wie es scheint, zu einer befriedigenderen Lösung der vorliegenden Schwierigkeiten. Wir müssen uns hier darauf beschränken, die beiden Wege kurz anzudeuten.

1. Der erste Weg besteht darin, daß man die übliche Sprach form mit der starren Typeneinteilung beibehält. Hier gehört jede Variable und jede logische Konstante, die zum Wertbereich einer Variablen gehört, einem festen Typus einer bestimmten endlichen Stufe an. Man schreibt zunächst jedem Axiomensystem eine Stufenzahl *n* zu, die die Mindeststufe des höchsten Grundprädikates gibt (ein Axiomensystem der elementaren Arithmetik erhält z. B. die Stufenzahl 1, das Russell sche Axiomensystem der projektiven Geometrie (s. o.) die Stufenzahl 2). Einem Axiomensystem ordnet man dann abzählbar unendlich viele Darstellungen zu, die

[29]) in einem Gespräch auf dem Pariser Kongreß 1935.

aus einer stufen-niedrigsten dadurch hervorgehen, daß man alle ihre Zeichen stufenmäßig in gleicher Weise erhöht. An die Stelle der oben eingeführten Strukturen treten jetzt die *n*-Strukturen, die mit Hilfe der *n*-stufigen Isomorphie definiert werden. Dieselbe *n*-Struktur besitzen alle die Prädikate der Sprache, die miteinander *n*-stufig isomorph sind. Jedes Prädikat der Sprache, das von der Stufe *m* ist, besitzt im allgemeinen für jedes *n* mit $n < m$ eine *n*-Struktur. Eine *n*-Struktur gehört dann zu einem Axiomensystem, wenn jede Zeichenreihe, die die *n*-Struktur erfüllt, Modell einer Darstellung des Axiomensystem ist. Würde man nun den Erweiterungsbegriff in folgender Weise definieren: *N* heißt eine Erweiterung von *M* in bezug auf ein Axiomensystem von der Stufenzahl *n*, wenn *N* ein echtes Teilsystem *T* enthält, das zu *M* *n*-stufig isomorph ist, so hätte man damit das Gesuchte erfaßt: die Erweiterungen eines Modells können einer beliebigen anderen Stufe angehören. Hierbei kann der Extremalcharakter eines Modells — analog zu der früheren Darstellung — im Strukturbild der zu dem Axiomensystem gehörigen *n*-Strukturen veranschaulicht werden. Aber die angedeutete Definition kann nur jeweils für eine bestimmte Stufe von *N* aufgestellt werden, nicht allgemein für alle Stufen. Der eingeschlagene Wege teilt Eich nun. Es gibt die folgenden beiden Möglichkeiten,für die Behandlung eines bestimmten Maximalaxioms *A*, wenn wir nicht auf die erstrebte Formalisierung von *A*, d. h. auf seine Formuliere innerhalb der Objektsprache in einer mit den übrigen Axiomen gleichberechtigten Weise verzichten und stlatt dessen *A* als syntaktischen Satz über das Axiomensystem und seine Sprache formulieren wollen.

a) Wir bestimmen, entsprechend dem Vorschlag von Tarski, eine feste endliche Zahl als Stufendifferenz zwischien *N* und *M*. *A* ist nun formalisierbar. In den meisten üblichen Fällen wird der so formulierte Erweiterungsbegriff weit genug sein, also die Formulierung von *A* das Gemeinte treffen. Es sind jedoch, wie angedeute Fälle möglich, in denen diese Methode versagt.

b) Wir behalten — wie in den Überlegangen dieses Aufsatzes — die Stufengleichheit zwischen *N* und *M* bei. Um nun den gemeinten Sinn eines Maximalaxioms auch in dem Fall, daß die Objektsprache S_1 arm ist, zu sichern, richten wir die Definition für „analytisch in S_1 » so ein, daß ein Satz von der Form, ‚$(M)\ F_1\ (M)$‘ nur dann analytisch heißt, wenn er auch beim Übergang zu einer Sprache S_2 mit größerem Individuenbereich analytisch bleibt [30]). Damit wird erreicht, daß die vorangehenden Überlegungen gültig bleiben.

2. Der zweite Weg besteht darin, daß man die übliche Sprachform aufgibt. Das (einfache) System der Stufen und Typen wird beibehalten, aber nur die deskriptiven (nicht Logisch-mathematischen) Zeichen werden einem festen Typus zugeteilt. Die Variablen und diejenigen logischen Konstanten, die überhaupt zum Typussystem gehören, sind dagegen typusbeweglich, d. h. sie werden keinem bestimmten Typus zugewiesen, sondern können eine abzählbar-unendliche Reihe von Typen durchlaufen, anfangend mit dem „Grundtypus“ des betreffenden Zeichens. Der Bereich der möglichen Einsetzungswerte für eine Variable innerhalb eines bestimmten Satzes kann hierbei aber unter Umständen durch den Zusammenhang des Satzes beschränkt sein [31]). Man kann diese Verwendung der Variablen und logischen Konstanten als Einführung transfiniter Stufen auffassen [32]). Zu einem bestimmten Axiomensystem gehören dann Modelle verschiedener Stufen. Die vollständige Isomorphie zweier Modelle in bezug auf ein bestimmtes Axiomensystem wird dann durch Bezugnahme auf die Grundstufe der Grundvariablen des Axiomensystems definiert; diese Stufe kann für zwei bestimmte Modelle niedriger sein als die Grundstufe der Modelle selbst. Den Begriff der Erweiterung definiert man nun in der zweiten der oben (§ 4) angegebenen Weise, also nicht einfach durch die Inklusion, wie im vorliegenden Aufsatz, sondern mit Hilfe der vollständigen Isomorphie (in bezug auf das betreffende Axiomensystem) mit einem echten Teilmodell. Die Extremalaxiome können nun in der Objekt, sprache selbst formuliert werden. Wenn dann z. B. in einem

---

[30])Vgl. die analoge Bemerkung zu der Definition für analytisch in II‘ in: R. Carnap, Logische Syntax, § 34, und die Durchführung dieser Definition in: R. Carnap, Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik. Monatsh. Math. Phys. 42, S. 163-190, 1935, hierzu S. 74

[31]) Zu dieser, bisher nicht üblichen, aber in mancher Hinlicht zweckmäßigen Sprachform gehört das Systemvon W. v. O. Quine , A System of Logistic. Cambridge, Mass., 1934. — Die in den „Principia Mathematica“ angewendete sog. systematische Mehrdeutigkeit ist dagegen nicht hierher zu rechnen. Denn dort wird an der starren Typeneinteilung festgehalten. Die Schreibung ‚$\alpha \subset C\, \alpha$‘ wird nur als abkürzende Zusammenfassung für die folgende unendliche Reihe von Sätzen aufgefaßt, wobei der obere Index die Stufenzahl angeben Toll: ‚ $\alpha(^1) \subset (^2)\, \alpha(^1)$‘, $\alpha(^2) \subset (^3)\, \alpha\, (^2)$‘ usw.

[32]) Vgl. R. Carnap, Logische Syntax, § 53, mit Hinweis auf Hilbert und Gödel ; und A. Tarski , Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia Philosophica, l, S. [1]-[145], 1935, hierzu S. [136] f.

Maximalaxiom die Wendung auftritt „Es gibt keine Erweiterung", so ist damit bei dieser Sprachform ausgesagt: „Es gibt auf keiner Stufe eine Erweiterung", also tatsächlich das, was man gemeint hat, wenn man bisher derartige Axiome in Wortsprache formuliert hat. Auf diesem Weg gelangt man somit, wie es scheint, zu der befriedigendsten Lösung der beschriebenen Schwierigkeit. Die Aufgabe, die bisher noch nirgends resflos gelöst ist, besteht nun darin, ein für die Formulierung von Axiomensystem en geeignetes Sprachsystem der artgedeuteten Art aufzustellen. Hierfür sind nicht nur, wie üblich, die Umformungsbestimmungen, sondern auch die Formbestimmungen genau anzugeben, insbesondere auch in bezug auf die Form der Ausdrücke, die für eine Variable je nach dem Zusammenhang eingesetzt werden dürfen. Diese Bestimmungen müssen so getroffen werden, daß trotz der Auflockerung der Typenregel die bekannten Antinomien ausgeschlossen sind. Die Aufstellung einer derartigen Sprachform ist nicht etwa nur für die Behandlung der Extremal axiome nützlich, sondern ganz allgemein für die Axiomatik. Der Bereich der zulässigen Modelle eines Axiomensystems ist bei dieser Sprachform viel umfassender als bei der üblichen. Darüber hinaus ist diese Sprachform auch für die allgemeinen Probleme der Logik, von besonderem Interesse.