

HEYTING, A.: Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie. (Ergebn. d. Math., Bd. 3, Heft 4).S. Berlin 1934, J. Springer.

Von den drei Hauptrichtungen in der Grundlagenforschung der Mathematik (vgl. die Königsberger Vorträge von C a r n a p , H e y t i n g und v. Neumann, Erk. Bd. 2) werden in dem vorliegenden Forschungsbericht Intuitionismus und Formalismus behandelt. Ein weiteres Heft von G ö d e l , das den Logizismus behandeln soll, ist in Vorbereitung.

Im ersten Teil des Heftes wird nach einem kurzen Bericht über die dem Intuitionismus verwandten Auffassungen von P o i n c a r é , B o r e l , K a u f m a n n u. a. der *Brouwersche Intuitionismus* ausführlich dargestellt. Dabei wird besonders betont, daß nach der intuitionistischen Auffassung die Mathematik grundsätzlich unabhängig von der Sprache ist, daß sie sich nicht in ein System fertig aufgezählter Grundbegriffe und Elementarschlüsse zwängen läßt, daß vielmehr jeder einzelne Schluß unmittelbar auf seine Evidenz geprüft werden muß. Die Konsequenzen dieser Auffassung für den Ausbau der Logik, der Arithmetik, der Analysis und der Mengenlehre werden entwickelt. Ferner wird auch über die Überlegungen von K o l m o g o r o f f , G l i v e n k o , G ö d e l und G e n t z e n zur Interpretation der intuitionistischen Logik berichtet. Zu dem Nachweis von G ö d e l , daß die gesamte klassische Arithmetik, allerdings mit abweichender Interpretation, in die intuitionistische Arithmetik übersetzt werden kann, bemerkt H e y t i n g , für den Intuitionisten sei aber gerade die Interpretation das Wesentliche.

Im zweiten Teil wird zunächst kurz die axiomatische Methode besprochen, die im allgemeinen als nützlich anerkannt, aber für die autonome Begründung der Mathematik als ungeeignet hingestellt wird. Dann folgt eine ausführliche Darstellung von *Hilberts Beweistheorie*. Sein formales System der Logik und Mathematik wird angegeben. Es wird über die Versuche berichtet, die Widerspruchsfreiheit zu beweisen; dabei werden auch die Arbeiten von Ackermann, v. Neumann, Herbrand und Gödel berücksichtigt. Heyting erklärt, daß der Umkreis der sog. finiten Beweismittel, die in der Hilbertschen Metamathematik zum Beweis der Widerspruchsfreiheit des formalen Systems zur Verwendung zugelassen werden, nicht genau abgegrenzt ist; auf Grund seiner intuitionistischen Auffassung fügt er hinzu: „Das ist, wo es um inhaltliche Fragen geht, wohl auch nicht möglich“. Heyting ist der Ansicht, daß Gödels Ergebnisse „das Gelingen des Beweises für die Widerspruchsfreiheit der Analysis auf der Hilbertschen Grundlage sehr unwahrscheinlich machen“; er fügt aber hinzu, daß der Beweis vielleicht gelingen könnte, wenn man andere als Hilberts finite Beweismittel verwendet, ohne aber über den Bereich der intuitionistisch zulässigen Mittel hinauszugehen.

Heyting erörtert dann die Beziehungen zwischen den drei anfangs genannten Richtungen, die sich gegenseitig vielfach beeinflußt haben. Er meint aber, der Logizismus habe sich von den Diskussionen ferngehalten; „seine gedankliche Einstellung weicht so stark von den andern ab, daß eine Diskussion wenig Sinn hätte“ (als Heyting seinen Bericht verfaßte, war die Darstellung meiner Auffassung, daß sich die Grundgedanken des Logizismus und des Formalismus verfühnen lassen, noch nicht veröffentlicht). Die Beziehungen zwischen Formalismus und Intuitionismus werden analysiert. Dabei wird in manchen Punkten eine Übereinstimmung festgestellt. Die entscheidende Differenz liege in der von Hilbert abgelehnten These Brouwers, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit der formalistischen Mathematik keine inhaltliche Rechtfertigung für diese Mathematik sei. Nach Heytings Ansicht beruht dieser Gegensatz auf einer weitgehenden Divergenz der Weltanschauung, die sich nicht leicht überbrücken lassen. Im letzten Abschnitt wird die Frage der Anwendung der Mathematik auf Erfahrung vom formalistischen und vom intuitionistischen Standpunkt aus besprochen. Hier hält Heyting die Differenz zwischen den beiden Richtungen für noch größer als in der Frage der Grundlegung der reinen Mathematik; eine Einigung sei hier unerreikbaar. — Dem Heft ist ein ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben.

Es ist Heyting gelungen, in dem beschränkten Raum des Heftes eine erstaunlich inhaltreiche Darstellung der beiden Richtungen zu geben. Dabei stellt er nicht nur die Hauptthesen, sondern auch die wichtigsten Ergebnisse auf den verschiedenen Gebieten in sehr sachkundiger und zuverlässiger, dabei stets klarer und übersichtlicher Weise dar. Daß der Bericht infolge der gedrängten Fassung sich nicht als Einführung für Anfänger eignet, ist selbstverständlich. Aber jeder, der ein wenig von Logik und Grundlagenfragen der Mathematik weiß, wird ihn mit Nutzen und Genuß studieren. Es ist besonders anzuerkennen, daß Heyting auch die Auffassungen seiner Gegner nicht nur mit Objektivität behandelt, sondern treffend und klar darstellt.

R. Carnap.