Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik.

Von **Rudolf Carnap** in Prag.

1. Die Antinomien.

Es sei irgend ein Kalkül in axiomatischer Form gegeben, der die Arithmetik (die elementare Theorie der natürlichen Zahlen) enthält.

Die rein formale, d. h. auf die Bedeutung der Zeichen nicht bezugnehmende Untersuchung eines Kalküls bezeichnen wir als (logische) Syntax des Kalküls. (Ist der Kalkül ein mathematisches System, so ist seine Syntax die Metamathematik im Sinn von Hilbert; ist der Kalkül ein rein logischer, so ist seine Syntax Metalogik im Sinne der Warschauer Logiker.) Die Sprache, in der der Kalkül formuliert ist, nennen wir die Objektsprache (es ist meist eine symbolische Sprache); die Sprache, in der die Syntax, also die Sätze über den Kalkül, formuliert werden, nennen wir die Syntaxsprache (es ist meist die gewöbnliehe Wortsprache). Gödel[1]) hat gezeigt, wie man eine Syntax „arithmetisieren" kann; man ordnet den Zeichen der Objektsprache eindeutig Zahlen zu (wir nennen sie ihre Gliedzahlen); dann hat man es anstatt mit der Anordnung und Umformung von Zeichenreihen nur noch mit Zahlenreihen und ihren arithmetischen Eigenschaften und Beziehungen zu tun; die Syntax ist, in dieser Weise formuliert, ein Teil der Arithmetik. Während im allgemeinen Objektsprache und Syntaxsprache zwei verschiedene Sprachen sind, kann man nun, wenn eine Objektsprache S_1 eine Arithmetik enthält, die Syntax von S_1 in arithmetisierter Form in . S_1 selbst formulieren[2]). Dann ist die Syntaxsprache in der Objektsprache enthalten. Die syntaktischen Sätze, die über die Objektsätze sprechen, sprechen dann hier unter Umständen über sich selbst. Es erhebt sich nun die Frage, ob durch diese Selbstbezogenheit nicht vielleicht Widersprüche entstehen. Diese Frage ist des-

[1]) K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. Monatsh. Math. Phys. 38, 173-198, 1931.

[2]) R. Carnap, Logische Syntax der Sprache. Sehr. z. Wise. Weltauff., 8, Wien 1934. Im Folgenden mit „Syntax" bezeichnet.

halb bedeutungsvoll, weil sie sich nicht auf Kalküle einer besonders konstruierten Art bezieht, sondern auf sämtliche Systeme, die die Arithmetik enthalten. Wir wollen diese Frage untersuchen, wobei wir die Ergebnisse von Gödel verwerten.

Die bekannten, in früheren Systemen der Mengenlehre und der Logik aufgetretenen Widersprüche, die sog. Antinomien oder Paradoxien, wollen wir nach dem Vorgang von Ramsey[3]) in zwei Arten einteilen. Wir werden sehen, daß die Antinomien der zweiten Art gerade die sind, die für unsere Frage in Betracht kommen. Wir wollen sie deshalb näher untersuchen. Für die Beispiele verwenden wir teils die Wortsprache, teils die Russellsche Symbolik (mit geringfügigen Modifikationen). Wir betrachten zunächst zwei Beispiele von Antinomien:

1. Antinomie von Russell[4]). Wir definieren: eine Eigenschaft heiße imprädikabel, wenn sie sich selbst nicht zukommt. Die Definition lautet in Symbolen: ‚Impr (F) ≡ ~F(F)'. Setzen wir hier für ‚F' ‚Impr' selbst ein, so erhalten wir den kontradiktorischen Satz ‚Impr (Impr) ≡ ~Impr (Impr)'.

2. Antinomie von Grelling [5]). Wir definieren: in einer Sprache, die ihre eigene Syntax enthält, soll ein syntaktisches Prädikat (z. B. ein Eigenschaftswort) heterologisch heißen, wenn der Satz, der diesem Prädikat selbst die von ihm ausgedrückte Eigenschaft zuschreibt, falsch ist. Ist z. B. ‚Q' ein syntaktisches Prädikat, so soll gelten: ‚Het(‚Q') ≡ ≡ ~Q (‚Q')'. (Man beachte den prinzipiellen Unterschied zwischen dieser Antinomie und der vorigen, der in manchen Darstellungen verwischt wird; hier wird nicht der Eigenschaft Q, sondern dem Prädikat, d. h. dem Zeichen ‚Q' die Eigenschaft Q zugeschrieben!) Beispiel: Das Eigenschaftswort ‚einsilbig' ist heterologisch, weil ‚einsilbig' nicht einsilbig, sondern dreisilbig ist. Nehmen wir nun anstatt des Prädikates ‚Q' das soeben definierte Prädikat ‚Het' selbst, so erhalten wir aus der angegebenen Definitionsformel den kontradiktorischen Satz ‚Het (‚Het') ≡ ~ Het (‚Het')'.

---

[3]) F. P. Ramsey, The foundations of mathematics. Proc. London Math. Soc., Ser.2, 25, 338-384, 1925. Abgedruckt in: Ramsey, The foundations of mathematics and other logical essays. London 1931.

[4]) B. Russell und A. N. Whitehead, Principia Mathematica. I. Cambridge (1910). 2. A. 1925. — Dieselben, Einführung in die mathematische Logik. (Übersetzung der Einleitungen des genannten Werkes.) München 1932. — Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. (Orig. 1919.) München 1923.

[5]) K. Grelling und L. Nelson, Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. Abh. d. Friesschen Schule. N. F. 2, 301-334, 1908.

Russell hat, um in seiner Sprache die Antinomien zu vermeiden, eine komplizierte Typenregel aufgestellt. Dadurch ergaben sich besonders in der Theorie der reellen Zahlen gewisse Störungen, zu deren Überwindung Russell sich genötigt sah, ein eigenes Axiom aufzustellen, das sog. Reduzibilitätsaxiom. Ramsey hat gezeigt, daß das gleiche Ziel sich mit einfacheren Mitteln erreichen läßt. Man kann nämlich zwei Arten von Antinomien unterscheiden; wir nennen sie logische (im engeren Sinn) und syntaktische (diese werden auch sprachliche, epistemologische oder semantische genannt). Beispiel (1) gehört zur ersten, (2) zur zweiten Art. Ramsey hat, in Anknüpfung au Peano, darauf hingewiesen, daß die Antinomien der zweiten Art nicht unmittelbar im symbolischen System der Logik auftreten, sondern nur im Begleittext; denn in ihnen wird über die Ausdrücke gesprochen. Ramsey zog hieraus die praktische Schlußfolgerung, daß man sich beim Aufbau eines symbolischen Systems um diese (syntaktischen) Antinomien nicht zu kümmern brauche. Da nun die Antinomien erster Art schon durch die sog. einfache Typenregel ausgeschaltet werden, so genügt diese; die verzweigte Typenregel und das durch sie nötig gewordene Reduzi-bilitätsaxiom sind überflüssig.

Auf Grund der einfachen Typenregel ist der Typus eines Prädikats allein durch den Typus der zugehörigen Argumente bestimmt. Auf Grund der verzweigten Typenregel von Russen ist für den Typus eines Prädikats auch noch die Form seiner Definitionenkette maßgebend (z. B. ob definit oder nicht). Schon auf Grund der einfachen Typenregel gehört ein Prädikat stets zu einem andern (nämlich höherstufigen) Typus als die zugehörigen Argumente. Hier kann also ein Satz nicht die Form ‚F (F)‘ haben. Damit ist die für ‚imprädikabel‘ angegebene Definition offenbar ausgeschlossen. In gleicher Weise werden die übrigen bekannten Antinomien erster Art durch die einfache Typenregel beseitigt.

Das Problem der syntaktischen Antinomien tritt jedoch offenbar dann wieder auf, wenn es sich um eine Sprache S handelt, in der die Syntax von S selbst formuliert werden kann, also auch für jede Sprache, die die Arithmetik enthält. Die Befürchtung liegt nahe, daß bei einer derartigen, auf sich selbst bezogenen Syntax Widersprüche nach Art der syntaktischen Antinomien unvermeidlich seien oder daß zu ihrer Vermeidung besondere Einschränkungen etwa in der Art der verzweigten Typenregel erforderlich seien[6]). Die nähere Untersuchung wird jedoch zeigen, daß diese Befürchtung nicht zu Recht besteht.

---

[6]) Die genannte Ansicht wird z. B. von Chwistek vertreten. Dieser hatte schon vor Ramsey den Vorschlag gemacht, sich mit der einfachen Typenregel zu begnügen und dadurch das Reduzibilitätsaxiom unnötig zu machen. Später jedoch ist er zu der Auffassung gekommen, daß beim Verzicht auf die verzweigte Typenregel die syntaktischen Antinomien, z. B. die von Richard, aufträten (vgl.

Das wichtigste Beispiel einer syntaktischen Antinomie ist neben der von Grelling die schon im Altertum berühmte Antinomie des Lüguers. Jemand sagt : „Ich lüge", genauer : „Ich lüge mit diesem Satz", m. a. W.: „Dieser Satz ist falsch". Ist dieser Satz wahr, so ist er falsch; ist er falsch, so ist er wahr.

Ferner gehört zu den syntaktischen Antinormen die von Richard[7]). In ihrer ursprünglichen Fassung bezieht sie sich auf die in einer bestimmten Wortsprache definierbaren Dezimalbrüche. Nun lassen sich die Dezimalbrüche (oder die reellen Zahlen) durch einstellige Zahlprädikate (Abkürzung: „zpr^1") darstellen. (Unter einem zpr^1 verstehen wir ein Prädikat, zu dem Ein Zahlausdruck als Argument gehört.) Daher läßt sich die Antinomie in folgender Weise formulieren. S sei eine Sprache, deren Syntax in S formatiert ist. In S sind höchstens abzählbar viele zpr^1 definierbar. Wir können daher jedem solchen zpr^1 eindeutig eine natürliche Zahl als seine Nummer zuordnen (z. B. durch lexikografische Anordnung der Definitionssätze oder in einer arithmetisierten Syntax einfach durch die Gliedzahl des zpr^1). ‚a' sei ein Zahlausdruck; wir wollen die Zahl a richardisch neuneu, wenn a Nummer eines zpr^1, etwa ‚P', ist, das der Zahl a nicht zukommt, so daß also ; ‚P(a)' falsch (kontradiktorisch) ist. ‚Richardisch' ist hiernach ein definiertes zpr^1, hat also auch eine bestimme Nummer, etwa b. Nun muß b entweder richardisch sein oder nicht. Ist b richardisch, so kommt nach Definition dem b die Eigenschaft mit der Nummer b nicht zu; dann ist also b nicht richardisch, im Widerspruch zur Annahme. Also muß b nicht-richardisch sein. b muß die Definition von ‚richardisch' unerfüllt lassen, also die Eigenschaft mit der Nummer b besitzen, also richardisch sein. Das ist ein Widerspruch.

Für die genannten syntaktischen Antinomien ist charakteristisch, daß sie mit den Begriffen ‚wahr' und ‚falsch' operieren. Wir wollen deshalb, bevor wir uns weiter mit den syntaktischen Antinomien befassen, diese Begriffe näher betrachten.

2. Die Begriffe ‚wahr' und ‚falsch'.

Die Begriffe ‚wahr' und ‚falsch' werden gewöhnlich als Hauptbegriffe der Logik angesehen. Sie werden in der üblichen Wortsprache

---

Chwistek, Die nominalistische Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis 3, 367 bis 388, 1933). Nach meiner Ansicht beruht aber die Unentbehrlichkeit der verzweigten Typenregel für das System von Chwistek nur auf einer besonderen Eigentümlichkeit dieses Systems (vgl. Syntax, S. 191 f.)

[7]) Vgl. Russell, Princ.Math. I, S.61; A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Berlin, 3. A. 1928, S. 214 ff.

so verwendet, daß, wenn ‚S_1' Bezeichnung irgend eines Satzes ist, die Sätze, S_1 ist wahr' und ‚S_1ist falsch' zu derselben Sprache gehören wie S_1. Diese übliche Verwendungsweise der Begriffe ‚wahr' und ‚falsch' führt jedoch zu einem Widerspruch. Dies soll in Anlehnung au die Antinomie des Lügners gezeigt werden. Um uns vor Fehlschlüssen zu hüten, wollen wir streng formal vorgehen. Die Sprache S enthalte die Syntax von S. Wir wollen als syntaktische Zeichen von S Frakturbuchstaben verwenden, als nicht-syntaktische Zeichen von S Wörter der deutschen Sprache und lateinische Buchstaben. S enthalte drei syntaktische Eigenschaftswörter ‚R', ‚W', ‚F', über die wir nur die folgenden Voraussetzungen V 1—3 machen. ‚A_1', ‚A_2' seien Bezeichnungen für irgend welche Ausdrücke der Sprache S; diese Ausdrücke mögen Sätze sein oder auch nicht. Wir wollen nun für den Satz „A_1 hat die Eigenschaft R" abkürzend schreiben : ‚R(A_1)'. Deutet man ‚R(A_1)' durch „A_1 ist ein Nicht-Satz", ‚W(A_1)' durch „Der Ausdruck A_1 ist ein Satz, und zwar ein wahrer", ‚F(A_1)' durch „A_1 ist ein Satz, und zwar ein falscher", so stehen unsere Voraussetzungen V 1—3 in Einklang mit dem üblichen Sprachgebrauch.

V 1. Jeder Ausdruck von S hat genau eine der drei Eigenschaften R, W, F.

V 2 *a)* ‚A' sei ein beliebiger Ausdruck von S (nicht: Bezeichnung eines Ausdrucks!); wenn W(‚A'), so A. [Z. B.: Wenn ‚dieser Baum ist hoch' wahr ist, so ist dieser Baum hoch.]

b) Wenn A, so W(‚A').

V 3. Für irgend ein A_1 haben die Ausdrücke ‚R(A_1)', ‚W(A_1)', ‚F(A_1)' nicht die Eigenschaft R (als nach V 1 entweder W oder F).

Aus V 1 und 2*b* folgt: Wenn F(‚A'), so nicht W(‚A'), also nicht

$$\text{A.} \tag{4}$$

Aus V 1. und 2*a* folgt: Wenn nicht A, so nicht W(‚A'), also

$$\text{F(‚A') oder R(‚A').} \tag{5}$$

Man kann nun in Analogie zur Aussage des Lügners leicht zeigen, daß die Untersuchung eines Ausdrucks A_2 mit dem Wortlaut ‚F(A_2)' zum Widerspruch führt. Daß hierbei ein Ausdruck durch ein Zeichen (nämlich ‚A_2') bezeichnet wird, das in ihm selbst vorkommt, wirkt leicht verwirrend. Wir können den Widerspruch auch ohne diese direkte Selbstbeziehung herstellen ; nicht sie bildet — wie man vielfach glaubt — den Fehler, auf dem der Widerspruch beruht; der Fehler liegt vielmehr in der uneingeschränkten Verwendung der Begriffe ‚wahr' und ‚falsch'. Wir betrachten die beiden Ausdrücke ‚$F(A_1)$ und ‚$W(A_2)$'. Offenbar sind dies Ausdrücke, schlimmstenfalls Nicht-Sätze. Dabei steht es uns noch völlig frei, welche Ausdrücke wir mit ‚A_1' und ‚A_2' bezeichnen wollen; wir bestimmen

a) A_1 sei der Ausdruck ‚$W(A_2)$'; *b)* A_2 sei der Ausdruck

$$‚F(A_1)'. \tag{6}$$

(Wie man sieht, kommt hier die Bezeichnung keines Ausdrucks in ihm selbst vor).

Nach V 3 : W(‚F(A_1)') oder F(‚F(A_1)'). (7)

Wir machen zunächst die Annahme: W(‚F(A_1)'). Aus ihr würde nach V 2*a* folgen : F(A_1). Dies ist nach (6*a*) : F(‚W(A_2)'). Hieraus würde nach (4) folgen: nicht W(A_2). Dies ist nach (6*b*) : nicht W(‚F(A_1)'). Unsere Annahme führt zum eigenen Gegenteil, ist also widerlegt.

Daher gilt nach (7):

$$F(‚F(A_1)') \tag{8}$$

Hieraus folgt nach (4) : nicht F(A_1) (9)
Dies ist nach (6*a*): nicht F(‚W(A_2)') (10)
Nach V 3: W(‚W(A_2)') oder F(‚W(A_2)') (11)
Aus (10), (11) : W(‚W(A_2)') (12)
Hieraus nach V 2*a*: W(A_2) (13)
Aus (8), (6*b*): F(A_2) (14)
Hieraus nach V 1: nicht W(A_2) (15)

(13) und (15) bilden eineu Widerspruch.

Dieser Widerspruch entsteht nur, wenn die Prädikate ‚wahr' und ‚falsch', bezogen auf Sätze einer Sprache S, in S selbst verwendet werden. Dagegen kann man in folgender Weise widerspruchsfrei verfahren. Man verwendet die Prädikate ‚wahr (in S_1)' und ‚falsch (in S_1)' in einer Syntax von S_1 die nicht in S_1 selbst, sondern in einer andern Sprache S_2 formuliert wird. S_2 kann z. B. aus S, dadurch entstehen. daß man jene beiden Prädikate als neue Grundzeichen hinzufügt und geeignete Grundsätze für sie aufstellt, etwa so : 1. Jeder Satz von S_1 ist entweder wahr oder falsch. 2. Kein Satz von S_1 ist zugleich wahr und falsch. 3. Ist in S_1 S_2 Folge von S_1 und ist S_1 wahr, so ist auch S_2 wahr. Eine derartige syntax-ähnliche Theorie wäre jedoch keine echte Syntax. Denn Wahrheit und Falschheit sind keine echten syntaktischen Eigenschaften; ob ein Satz wahr oder falsch ist, ist aus seiner Gestalt, d. h. aus Art und Reihenfolge seiner Zeichen, im allgemeinen nicht zu ersehen. [Man hat das meist übersehen, weil man sich gewöhnlich nicht mit deskriptiven, sondern nur mit logischen Sprachen befaßt hat; in bezug auf diese fallen allerdings ‚wahr' und ‚falsch' mit ‚analytisch' bzw. ‚kontradiktorisch' zusammen und sind daher syntaktische Begriffe.]

Wenn auch in einer eigentlichen (d. h. auf die Gestalteigenschaften der Sätze beschränkten) Syntax ‚wahr' und ‚falsch' im allgemeinen nicht vorkommen, so können doch die meisten üblichen Sätze, die diese Wörter verwenden, übersetzt werden, sei es in die Objektsprache, sei es in die Syntaxsprache. Ist S_1 ‚A', so kann z. B. ‚ S_1 ist wahr' durch ‚A' übersetzt werden. In logischen Untersuchungen tritt ‚wahr' (und ‚falsch') in zwei verschiedenen Verwendungsweisen auf. Ergibt sich die Wahrheit des betreffenden Satzes schon aus den Umformungsbestimmungen der betreffenden Sprache, so kann ‚wahr' durch ‚analytisch' oder ‚beweisbar' übersetzt werden ; und entsprechend ‚falsch' durch ‚kontradiktorisch' oder ‚widerlegbar'[8]). Auch auf synthetische Sätze kann ‚wahr' bezogen werden; das geschieht aber in logischen Untersuchungen nur in konditionaler Form, etwa : ‚wenn S_1 wahr ist, so ist S_2 wahr (bzw. falsch)'. Ein solcher Satz kann übersetzt werden in den syntaktischen Satz ‚ S_2 • ist Folge von (bzw. unverträglich mit) S_1'.

3. Die syntaktischen Antinomien.

Wir kehren nun zu der Frage zurück, ob bei der Formulierung der Syntax von S in S vielleicht Widersprüche von der Art der syntaktischen Antinomien hergestellt werden können, wenn man in der

[8]) Unter „analytisch" (bzw. „kontradiktorisch") ist verstanden: aus rein logisch-mathematischen Gründen wahr (bzw. falsch). (Formale Definition s. u. S.276) Haben die für eine Sprache aufgestellten Umformungsbestimmungen die übliche Form von (logisch-mathematischen) Grundsätzen und Schlußregeln, so heißt eine endliche Satzreihe, die von Grundsätzen ausgeht und nach Schlußregeln fortschreitet, ein Beweis. Der letzte Satz eines Beweises heißt beweisbar, seine Negation widerlegbar. Wie Gödel gezeigt hat, kann man (abgesehen von ganz einfachen Sprachen) die Grundsätze und Schlußregeln niemals so reich ausgestalten, daß alle analytischen Sätze beweisbar, alle kontradiktorischen widerlegbar werden. Die Begriffe ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' können nicht mit Hilfe endlicher Satzreihen auf Grund so einfacher, definiter Hilfsmittel, wie es Grundsätze und Schlußregeln sind, definiert werden; ihre Definitionen sind weit komplizierter und müssen auch unendliche Satzklassen zu Hilfe nehmen. (Vgl. Syntax.) Ist ein Satz entweder beweisbar oder widerlegbar, so heißt er entscheidbar; andernfalls unentscheidbar. Ist ein Satz entweder analytisch oder kontradiktorisch, so heißt er L-determiniert andernfalls synthetisch.

üblichen Formulierung dieser Antinomien ‚wahr‘ und ‚falsch‘ in der soeben angegebenen Weise durch syntaktische Begriffe ersetzt.

S sei eine widerspruchsfreie Sprache (und schärfer: eine konsistente, vgl. Syntax S. 160), die die Arithmetik und daher auch eine arithmetisierte Syntax von S selbst enthält. Es gibt dann ein bestimmtes Verfahren, nach dem man zu jeder beliebigen in S formulierbaren syntaktischen Eigenschaft eineu Satz S_1 von S derart konstruieren kann, daß S_1 sich selbst diese Eigenschaft — zu Recht oder zu Unrecht — zuschreibt (Syntax S. 91). Wir wollen nun versuchen, mit Hilfe einer solchen Konstruktion die Antinomie des Lügners nachzubilden. Sie besteht in einem Satz, der seine eigene Falschheit besagt.

Wir wollen in dieser Antinomie zunächst ‚falsch‘ durch ‚nicht-beweisbar‘ ersetzen. Bilden wir einen Satz S_1 von S, der von sich selbst aussagt, er sei nicht-beweisbar in S, so haben wir in S_1 eine Analogie zu dem von Gödel konstruierten unentscheidbaren Satz des Systems der Principia Mathematica[9]). Hier entsteht kein Widerspruch: Ist S_1 wahr (analytisch), so ist S_1 nicht falsch (kontradiktorisch), sondern nur nicht-beweisbar in S; das ist tatsächlich der Fall. Die Eigenschaften ‚analytisch‘ und ‚nicht-beweisbar‘ sind nicht unvereinbar.

Wir wollen jetzt im Setze des Lügners ‚falsch‘ durch ‚widerlegbar‘ ersetzen. Wir denken uns in S einen Satz S_2 konstruiert, der aussagt, daß S_2 selbst (in S) widerlegbar ist. S_2 ist dann ein Analogon zu der Aussage des Lügners. Wir wollen zusehen, ob der Widerspruch sich in der bekannten Weise ergibt. Wir nehmen zunächst an, S_2 sei tatsächlich widerlegbar. Dann wäre S_2 inhaltlich richtig, also analytisch. Andrerseits ist aber jeder widerlegbare Satz kontradiktorisch, also nicht analytisch. Die Annahme ist somit falsch; S_2 ist also nicht-widerlegbar. Hieraus ergibt sich aber kein Widerspruch. S_2 ist tatsächlich nicht-widerlegbar; da S_2 das Gegenteil hiervon besagt, ist S_2 inhaltlich falsch, also kontradiktorisch. Die Eigenschaften ‚nicht-widerlegbar‘ and ‚kontradiktorisch‘ sind aber durchaus vereinbar miteinander (vgl. Anm. 8).

Die Unmöglichkeit, mit den Begriffen ‚nicht-beweisbar‘ oder ‚widerlogbar‘ die Antinomie des Lügners nachzubilden, beruht darauf, daß nicht alle analytischen Sätze einer Sprache S auch beweisbar, nicht alle kontradiktorischen Sätze auch widerlegbar sind. Wie aber, wenn wir für ‚wahr‘ und ‚falsch‘ die syntaktischen Begriffe ‚analytisch‘ und ‚kontradiktorisch‘ verwenden würden? Diese beiden Begriffe bilden wie ‚wahr‘ und ‚falsch‘ eine vollständige Einteilung der logischen

---

[9]) Gödel, a. a. O.; vgl. Syntax S. 92.

Sätze (d. h. der Sätze, die nur logische Zeichen enthalten, zu denen wir auch die mathematischen rechnen). Es läßt sich leicht zeigen, daß wir Widersprüche bilden können, wenn wir annehmen, ‚analytisch (in S)‘ und ‚kontradiktorisch (in S)‘ seien in einer Syntax definiert, die in S selbst formuliert ist. Wir könnten dann nämlich einen logischen Satz S_3 konstruieren, der bei inhaltlicher Deutung besagt, daß S_3 kontradiktorisch ist. S_3 entspräche vollkommen der Aussage des Lügners. S_3 wäre, weil logisch, entweder analytisch oder kontradiktorisch. Wäre nun S_3 kontradiktorisch, so wäre S_3 inhaltlich richtig, also analytisch, also nicht kontradiktorisch. Also müßte S_3 nicht-kontradiktorisch sein. Dann aber wäre S_3 inhaltlich-falsch, also kontradiktorisch. Das wäre ein Widerspruch. Unter denselben Voraussetzungen würde man auch die Antinomie von Grelling herstellen können[10]).

Wir haben gesehen : ist ‚analytisch (in S)‘ in S definierbar, so enthält S einen Widerspruch; also gilt:

Satz 1: Ist S widerspruchsfrei, so kann ‚analytisch (in S)‘ in S nicht definiert werden. Dasselbe gilt für ‚kontradiktorisch (in S)‘ and eine Reihe anderer Begriffe.

Soll eine Syntax einer Sprache S_1 den Begriff ‚analytisch (in S_1)‘ enthalten, so muß sie also in einer Sprache S_2 formuliert sein, die reichere Mittel zur Verfügung hat als S_l. Dagegen kann der Begriff ‚beweisbar (in S_1)‘ unter Umständen in S, definiert werden; ob das möglich ist oder nicht, hängt von dem Reichtum an Ausdrucksmitteln ab, der in S_1 zur Verfügung steht [10a]).

Die Untersuchung der Antinomie von Richard (S.266) führt zu einem ähnlichen Ergebnis. Angenommen, in der Sprache S gäbe es einen Funktor ‚num‘, durch den eine eindeutige Numerierung aller in S definierbaren zpr^1 hergestellt würde; ist z. B. ‚P‘ irgend ein zpr^1, so ist ‚num (P)‘ ein Zahlausdruck.

Eindeutigkeit der Numerierung ist vorausgesetzt:

---

[10]) Die Durchführung sei für die Sprache II (vgl. Syntax) angegeben. Angenommen, in II sei ein Prädikat, ‚An‘ derart definierbar, daß ‚An(*x*)‘ bedeutet: „Der ^{RZ}Satz *x* ist analytisch (in II)“. Dann könnte ‚heterologisch‘ definiert werden durch ‚Het(*x*) ≡ ~An (subst [*x*, 3, str (*x*)])‘. ‚Het (*x*)‘ habe die Reihenzahl b. Dann läßt sich leicht zeigen, daß für den Satz ‚Het(b)‘ sowohl die Annahme, er sei analytisch, als auch die Annahme, er sei nicht analytisch, zu einem Widerspruch führt.

[10a]) Mit den Sprachen I und II (vgl. Syntax) verhält es sich in diesem Punkt folgendermaßen: ‚Analytisch in I‘ ist nicht in I, wohl aber in I1 definierbar; ‚analytisch is II‘ ist nicht in II, sondern nur in einer noch reicheren Sprache definierbar. ‚Beweisbar in I‘ ist, weil indefinit, in I nicht definierbar; aber ‚beweisbar in II‘ kann in II selbst definiert werden, nämlich durch ‚($\exists$ *r*) [Bew Satz II (*r*, *x*)]‘.

$$(\text{num}\,(F) = \text{num}\,(G)) \supset (x)\,(F(x) = G(x)) \tag{1}$$

Mit Hilfe von ‚num' könnte nun ‚Ri' (‚richardisch') definiert werden:

$$\text{Ri}\,(x) \equiv (F)\,[(\text{num}\,(F) = \text{x}) \supset {\sim}F(x)] \tag{2}$$

Da ‚Ri' ein zpr^1 ist, so hat es auch eine bestimmte Nummer, bezeichnet durch ‚num (Ri)'. Wir nehmen nun zunächst an, die Nummer von ‚Ri' sei selbst richardisch: ‚Ri [num(Ri)]'. Dann ergibt sich leicht aus (2), wenn wir für ‚x' ‚nam (Ri)' und für ‚*F*' ‚Ri' einsetzen : ‚~Ri [num (Ri)]'. Da sich aus unserer Annahme ihr Gegenteil ergibt, so ist sie widerlegt; also ist bewiesen:

$${\sim}\text{Ri}\,[\text{num}\,(\text{Ri})] \tag{3}$$

Aus (1) : $(\text{num}\,(F) = \text{num}\,(\text{Ri})) \supset ({\sim}F[\text{num}\,(\text{Ri})] \equiv {\sim}\text{Ri}\,[\text{num}\,(\text{Ri})])$ (4)

Aus (3), (4) : $(\text{num}\,(F) = \text{num}\,(\text{Ri})) \supset {\sim}F[\text{num}\,(\text{Ri})]$ (5)

Aus (2) : $(F)\,[(\text{num}\,(F) = \text{num}\,(\text{Ri})) \supset {\sim}F[\text{num}\,(\text{Ri})]] \supset \text{Ri}[\text{num}\,(\text{Ri})]$ (6)

Aus (5), (6): $\text{Ri}[\text{num}\,(\text{Ri})]$ (7)

Die bewiesenen Sätze (3) und (7) widersprechen einander; S ist also widerspruchsvoll. Daraus ergibt sich:

Satz 2: Ist S widerspruchsfrei, so ist es nicht möglich, in S einen Funktor zu definieren, durch den eine eindeutige Numerierung der zpr^1 von S hergestellt würde. — Obwohl die Menge der in S definierbaren zpr^1 abzählbar ist, kann nach Satz 2 eine Abzählung für sie nicht mit den Mitteln von S selbst hergestellt werden.

4. Jede Arithmetik ist lückenhaft.

S_1 enthalte eine Arithmetik; die reellen Zahlen seien in S_1 durch einstellige Zahlfunktoren (Abkürzung: „zpr^1") dargestellt. S_1 sei Teilsprache von S_2. In S_2 sei die arithmetisierte Syntax von S_1 formuliert. Wir wollen zeigen; daß mit Hilfe der auf S_1 bezogenen arithmetisch syntaktischen Begriffe von S_2 ein zpr^1 in S_2 definiert werden kann, zu dem es in S_1 kein zpr^1 mit gleichem Wertverlauf gibt; das gilt für jede noch so reiche Sprache S_l, wenn wir S_2 hinreichend reich nehmen. Wir definieren das zpr^1 ‚k' in S_2 durch folgende Bestimmungen: „1. Ist *x* nicht Gliedzahl eines zpr^1 von S_1, so sei $\text{k}(x) = 0$; 2. Ist *x* Gliedzahl eines zpr^1 von S_l, etwa ‚h', so sei $\text{k}(x) = \text{h}(x) + 1$. Jedes zpr^1 von S_1 weicht dann für ein gewisses Argument (nämlich für seine eigene Gliedzahl) von ‚k' ab; also gibt es in S_1 kein zpr^1 von gleichem

Wertverlauf mit ‚k‘. In anderer Ausdrucksweise : es läßt sich eine reelle Zahl angeben, die keiner in S_1 definierbaren reellen Zahl gleich ist.

Satz 3: Für jede Sprache S läßt sich eine reelle Zahl angeben, die in S nicht definiert werden kann.

Die angegebene Definition für ‚k‘ entspricht dem sog. Diagonalverfahren der Mengenlehre. Satz 3 entspricht dem bekannten Lehrsatt der Mengenlehre, daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist. [Zum Begriff der überabzählbaren Mächtigkeiten vgl. jedoch § 8.] Andrerseits entspricht der angegebene Gedankengang auch der Richardschen Antinomie.

Das Ergebnis der Untersuchung der syntaktischen Antinomien sei kurz zusammengefaßt. Die Syntax einer Sprache S sei in S formuliert. Die Nachbildung der syntaktischen Antinomien mit Hilfe von Begriffen, die in S definiert sind, führt nicht zu Widersprüchen; aber sie ermöglicht den Nachweis, daß gewisse Sätze in S nichtbeweisbar oder unentscheidbar sind (Gödel). Mit Hilfe anderer Begriffe (z. B. ‚analytisch‘, ‚kontradiktorisch‘, ‚Folge‘, ‚Nummer‘, ‚Gliedzahl‘) ist die Nachbildung der syntaktischen Antinomien möglich. Das führt zum Nachweis, daß diese Begriffe (deren Definition man bisher nur mit Worten, nicht aber innerhalb eines formalisierten Systems formuliert hat) in S nicht definiert werden können, falls S konsistent oder wenigstens widerspruchsfrei ist. Da Begriffe und Sätze der reinen Syntax nichts anderes sind als syntaktisch gedeutete Begriffe und Sätze der Arithmetik, so führt also die Untersuchung der syntaktischen Antinomien zu dem Ergebnis, daß jede Arithmetik, die in irgend einer Sprache in irgend einem Umfang formuliert ist, notwendig in zweifacher Hinsicht lückenhaft ist.

Satz 4: Für jedes System einer Arithmetik lassen sich undefinierbare arithmetische Begriffe und unentscheidbare arithmetische Sätze angeben.

Diese Lückenhaftigkeit ist nicht etwa so zu verstehen, als gäbe es arithmetische Begriffe, die überhaupt nicht formal (kalkülmäßig) definiert werden könnten, oder arithmetische Sätze, die überhaupt nicht entschieden werden könnten. Für jeden Begriff, der etwa zunächst in einer Wortsprache irgendwie eindeutig angegeben ist, gibt es eine formale Definition in einer geeigneten Sprache. Jeder arithmetische Satz S_1, der etwa in der Sprache S_1 unentsebeidbar ist, ist in S_1 doch determiniert; und es gibt für ihn erstens eine reichere Syntaxsprache S_2, innerhalb deren entweder der Nachweis geführt werden kann, daß S_1 analytisch ist, oder, daß S_1 kontradiktorisch ist; und zweitens eine Objektsprache S_3, von der S_1 eine echte Teilsprache ist, derart, daß S_1 in S_3 entscheidbar ist. Aber es gibt keine Sprache, in der alle arithmetischen Begriffe definierbar wären, und keine Sprache, in der alle arithmetischen Sätze entscheidbar wären. [Dies ist der richtige Kern in der von Brouwer [11]) und in Anlehneng an ihn von Heyting[12]) ausgesprochenen Überzeugung, die Mathematik sei nicht restlos formalisierbar.] M. a. W.: alles Mathematische ist formalisierbar; aber die Mathematik ist nicht durch Ein System erschöpfbar, sondern erfordert eine unendliche Reihe immer reicherer Sprachen.

5. Relationstheorie.

In der Re1ationstheorie pflegt man die Eigenschaften der Relationen zu untersuchen, besonders die strukturellen Eigenschaften, d. h. diejenigen, die bei isomorpher Abbildung erhalten bleiben. Eine solche Theorie ist nichts anderes als die Syntax der mehrstelligen Prädikate. [Wir wollen als syntaktische Bezeichnung für Prädikate „pr“ verwenden ; für n-stellige Prädikate, d. h. solche, zu denen n Argumente gehören, „pr^n“ ; für einen Satz (z. B. ‚P (a, b)‘), der aus einem pr^n, etwa pr_1 (im Beispiel ‚P‘), und den Ausdrücken A_1, ... A_n (im Beispiel ‚a‘ und ‚b‘) als Argumenten besteht, „pr_1 (A_1, ... A_n)“.] Man pflegte früher zwischen den pr_1 und den zugehörigen Klassenzeichen zu unterscheiden; diese Unterscheidung machen wir nicht mehr, sondern bezeichnen mit dem pr_1 sowohl die Eigenschaft wie die Klasse (vgl. Syntax § 37, 38). Ebenso bezeichnen wir mit den pr^n für $n > 1$ sowohl die Beziehungen wie die zugehörigen Extensionen (Relationen).

Bei den relationstheoretischen Begriffen (z. B. „asymmetrisch“, „transitiv“, „isomorph“) ist es wichtig, zwischen ihrer Formulierung in der Objektsprache und der Formulierung in der Syntaxsprache zu unterscheiden. Durch diese Unterscheidung, deren Notwendigkeit meist nicht beachtet wird, klären sich, wie wir sehen werden, gewisse Paradoxien auf, die mit der Frage der Mehrheit transfiniter Mächtigkeiten and der Möglichkeit überabzählbarer Mengen zusammenhängen.

Wir wollen ein pr^n homogen nennen, wenn aus einem aus ihm und n-Argamenten gebildeten Satz durch beliebige Vertauschung dieser

[11]) L. E. J. Brouwer, Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Monatsh. Math. Phys.36, 153-164, 1929.

[12]) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Ber. Akad. Berlin, 1930 (S.3).

Argumente stets wieder ein Satz entsteht. Die meisten relationstheoretischen Begriffe beziehen sich auf homogene pr^2.

Die Relationseigenschaften der Symmetrie, der Reflexivität usw. werden nach dem üblichen, von Russell eingeführten Verfahren durch Prädikate zweiter Stufe ausgedrückt (oder, z. B. in Russells Symbolik, durch Klassenzeichen zweiter Stufe). Wir wollen die Definitionen in folgender Form schreiben:

(Erfülltheit) $$\mathrm{Erf}\,(F) \equiv (\exists x)(\exists y)(F(x, y)) \tag{1}$$

(Leerheit) $$\mathrm{Leer}\,(F) \equiv {\sim}\mathrm{Erf}\,(F) \tag{2}$$

(Symmetrie) $$\mathrm{Sym}\,(F) \equiv [\mathrm{Erf}\,(F) \,.\, (x)(y)(F(x, y) \supset \mathrm{F}(y, x))] \tag{3}$$

(Asymmetrie) $$\mathrm{As}\,(F) \equiv (x)(y)(F(x, y) \supset {\sim}F(y, x)) \tag{4}$$

(Reflexivität) $$\mathrm{Refl}\,(F) \equiv [\mathrm{Erf}\,(F) \,.\, (x)(y)((F(x, y) \vee F(y, x)) \supset F(x, x))] \tag{5}$$

(Totalreflexivität) $$\mathrm{Reflex}\,(F) \equiv [\mathrm{Erf}\,(F) \,.\, (x)(F(x, x))] \tag{6}$$

(Irreflexivität) $$\mathrm{Irr}\,(F) \equiv (x)({\sim}F(x, x)) \tag{7}$$

(Transitivität) $$\begin{aligned}\mathrm{Trans}\,(F) \equiv [&(\exists x)(\exists y)(\exists z)(F(x, y) \,.\, F(y, z)) \,.\\ &(x)(y)(z)((F(x, y) \,.\, F(y, z)) \supset F(x, z))]\end{aligned} \tag{8}$$

(Intransitivität) $$\mathrm{Intr}\,(F) = (x)(y)(z)[(F(x, y) \,.\, F(y, z)) \supset {\sim}F(x, z))] \tag{9}$$

Wir haben die üblichen Formen der Definitionen[13]) dadurch geändert, daß wir im Definiens von (3), (5), (6) und (8) einen Existenzsatz bzw. ‚Erf (*F*)‘ als Konjunktionsglied eingefügt haben. Nach der bisherigen Definition schließen sich nämlich Transitivität und Intransitivität nicht aus; und ebensowenig Symmetrie und Asymmetrie, ferner Reflexivität und Irreflexivität. Wenn nämlich eine Beziehung kein Mittelglied hat (d. h. kein Glied, das in einem Beziehungspaar als zweites und in einem andern als erstes Glied vorkommt), so ist sie zugleich transitiv und intransitiv (weil das Implikans im Definiens von (9) stets falsch ist); und eine leere Beziehung ist aus demselben Grund zugleich transitiv, intransitiv, symmetrisch, asymmetrisch, reflexiv und irreflexiv. Wir fügen deshalb Bedingungen ein, die für Symmetrie, Reflexivität und Transitivität die Nicht-Leerheit verlangen, ferner für Transitivität das Vorkommen eines Mittelgliedes (Nicht-Leerheit der zweiten Potenz der Beziehung). Auf Grund unserer Definitionen schließen die beiden Begriffe jedes der drei Paare einander aus. [Das Glied ‚Erf (*F*)‘ in (6) kann weggelassen werden, wenn der Individuenbereich nicht leer ist, d. h, wenn in der betreffenden Sprache ‚$(\exists x)(x = x)$‘ beweisbar ist; das ist in den üblichen logistischen Sprachen der Fall.]

---

[13]) Russell, Principia Mathematica, I. — Vgl. R. Carnap, Abriß der Logistik, Wien 1929.

6. Syntaktische Begriffe der Relationstheorie.

Der größeren Allgemeinheit wegen wollen wir annehmen, daß zu den Umformungsbestimmungen der Sprache S, die z. B. in Form von Grundsätzen und Schlußregeln aufgestellt sein können, nicht nur logisch-mathematische Bestimmungen gehören (wir wollen sie L-Bestimmungen nennen), sondern auch außerlogische, z. B. irgend welche Naturgesetze als Grundsätze. Ergibt sich ein Satz auf Grund der Umformungsbestimmungen aus andern, so nennen wir ihn eine Folge dieser andern; und zwar eine L-Folge, wenn nur L-Bestimmungen dabei verwendet sind. Wir nennen einen Satz (in S) gültig, wenn er sich aus den Umformungsbestimmungen ergibt (genauer: wenn er Folge der leeren Klasse von Sätzen ist); widergültig, wenn jeder Satz von S Folge von ihm ist; determiniert, wenn er entweder gültig oder widergültig ist. Die früher schon verwendeten (und damals nur inhaltlich erläuterten) Begriffe ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' definieren wir jetzt in analoger Weise : ein Satz heißt ana1ytisch, wenn er L-Folge der leeren Satzklasse ist; kontradiktorisch, wenn jeder Satz L-Folge von ihm ist. Die hier für Sätze definierten syntaktischen Begriffe können analog auch für Satzklassen definiert werden. Zwei oder mehrere Sätze heißen unverträglich (bzw. L-unverträglich) miteinander, wenn ihre Klasse widergültig (bzw. kontradiktorisch) ist; andernfalls verträglich. Zwei Sätze heißen gehaltgleich, wenn jeder Folge des andern ist. Zwei Sätze heißen gehaltgleich in bezug auf eine Satzklasse, wenn jeder von beiden Folge der um den andern Satz vermehrten Satzklasse ist.

Wir können jetzt den vorher definierten relationstheoretischen Begriffen der Objektsprache relationstheoretische syntaktische Begriffe an die Seite stellen. Der Unterschied zwischen diesen beiden Begriffsarten muß deutlich beachtet werden. Nehmen wir als Beispiel den Satz ‚As (P)' oder in Wortsprache ‚Die Beziehung P ist asymmetrisch . Dieser Satz — wir wollen ihn S_1 nennen — ist gehaltgleich mit ‚$(x)(y)[P(x, y) \supset \sim P(y, x)]$'. Im Unterschied dazu wollen wir sagen. das Prädikat ‚P' (nicht: die Beziehung P!) sei (gültig-asymmetrisch oder) G-asymmetrisch; wenn S_1 (nicht nur wahr, sondern) gültig ist ; und ‚P' sei (logisch-asymmetrisch oder) L-asymmetrisch, wenn S_1 (nicht nur gültig, sondern) analytisch ist. (Inhaltlich gesprochen:) Der Objektsatz ‚As (P)' oder ‚P ist asymmetrisch' spricht die Tatsache aus, daß die Beziehung P in keinem Paar in beiden Richtaugen besteht : dagegen besagt der syntaktische Satz , ‚P' ist G-asymmetrisch', daß diese Tatsache aus den Umformungsbestimmungen der Sprache S (also z. B.

ans den als Grundsätzen aufgestellten Naturgesetzen) zu entnehmen ist: und der syntaktische Satz , ‚P' ist L-asymmetrisch' besagt, daß diese Tatsache keine eigentliche synthetische Tatsache ist, sondern schon durch die L-Bestimmungen von S gegeben ist, also im wesentlichen durch die Definition von ‚P'.

Die angedeuteten Definitionen wollen wir etwas anders formulieren, um nicht die einschränkende Voraussetzung zu machen, daß in der Objektsprache S Alloperatoren und eigentliche Negations- und Implikationszeichen vorkommen. Wir stellen die folgenden syntaktischen Definitionen auf. pr_1 sei ein homogenes pr^2. pr_1 heißt gültig-leer oder G-leer (bzw. L-leer), wenn stets (d. h. hier und im Folgenden : für beliebige Argumente A_1, A_2) pr_1 (A_1, A_2) widergültig (bzw. kontradiktorisch) ist. pr_1 heißt G-erfüllt (bzw. L-erfüllt), wenn es einen gültigen (bzw. analytischen) Satz der Form pr_1 (A_1, A_2) gibt. pr_1 heißt G-symmetrisch (bzw. L-symmetrisch), wenn pr_1 nicht G-leer (bzw. L-leer) ist und pr_1 (A_2, A_1) stets Folge (bzw. L-Folge) von pr_1 (A_1, A_2) ist; pr_1 heißt G-asymmetrisch (bzw. L-asymmetrisch); wenn pr_1 (A_2, A_1) und pr_1 (A_1, A_2) stets unverträglich (bzw, L-unverträglich) sind. pr_1 heißt G-reflexiv, wenn pr_1 nicht G-leer (bzw. L-leer) ist und pr_1 (A_1, A_1) stets Folge (bzw. L-Folge) von pr_1 (A_1, A_2) und stets Folge (bzw. LFolge) von pr_1 (A_2, A_1) ist; pr_1 heißt G-totalreflexiv (bzw. L-totalreflexiv), wenn pr_1 (A_1, A_1) stets gültig (bzw. analytisch) ist ; pr_1 heißt G-irreflexiv (bzw. L-irreflexiv), wenn pr_1 (A_1, A_1) stets widergültig (bzw, kontradiktorisch) ist. pr_1 heißt G-transitiv (bzw. L-transitiv) - wenn die beiden Sätze pr_1 (A_1, A_2) und pr_1 (A_2, A_3) nicht stets unverträglich (bzw. L-unverträglich) sind und wenn pr_1 (A_1, A_3) stets Folge (bzw. L-Folge) jener beiden Sätze ist; pr_1 heißt G-intransitiv (bzw. L-intransitiv), wenn die genannten drei Sätze stets unverträglich (bzw-. L-unverträglich) sind.

Wir wollen uns den Unterschied zwischen den relationstheoretischen Begriffen der Objektsprache und denen der Syntaxsprache noch einmal durch eine Gegenüberstellung deutlich machen:

Die Eigenschaft der Symmetrie kommt gewissen Beziehungen zu.	Die Eigenschaft der G-Symmetrie kommt gewissen Prädikaten (nämlich Zeichen für Beziehungen) zu. (Dasselbe gilt für L-Symmetrie).
Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch das Symbol ‚Sym'	Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch das Wort ‚G-sym-

oder das Wort ‚symmetrisch' ; diese Zeichen gehören zur 0bjektsprache. | metrisch'; dieses Wort gehört zur Syntaxsprache.

Die folgenden Beispiele gelten unter Voraussetzung geeigneter Definitionen für die Prädikate in einer geeigneten Sprache S. Das pr^2 ‚Bruder' ist L-irreflexiv, aber weder G-symmetrisch, noch G-asymmetrisch. Geht aus den Umformungsbestimmungen von S hervor, daß im Bezirk B mindestens zwei Brüder, aber keine Geschwister verschiedenen Geschlechts vorkommen, so ist ‚Bruder in B' G-symmetrisch, aber nicht L-symmetrisch. ‚Vater' ist L-irreflexiv, L-asymmetrisch und L-intransitiv.

Satz 5: *a)* Ist das Prädikat ‚P' L-symmetrisch, so auch G-symmetrisch. — *b)* Ist ‚P' G-symmetrisch, so ist P (nicht : ‚P' !) symmetrisch; die Umkehrung gilt nicht allgemein. — *c)* Für die Sprache S mögen nur L-Bestimmungen aufgestellt sein (sie kann dabei aber auch deskriptive, d. h. außerlogische Zeichen enthalten) ; ist ‚P' in S L-symmetrisch, so auch G-symmetrisch, und umgekehrt. — *d)* Die Sprache S enthalte nur logische Zeichen (dann können für S nur L-Bestimmungen aufgestellt sein); ist ‚P' in S G- oder L-symmetrisch, so ist P symmetrisch, und umgekehrt. — Entsprechendes gilt für die übrigen Begriffe. Für 5*b* und 5*d* ist vorausgesetzt, daß die Sprache S ihre eigene Syntax enthält; und zwar ist hier S als Wortsprache genommen, wobei für ‚Sym (P)' geschrieben ist ‚P ist symmetrisch'.

7. Isomorphie.

Wir wollen noch einige weitere Begriffe der Relationstheorie definieren, die zu dem besonders wichtigen Begriff der Isomorphie führen. Zunächst stellen wir wie vorher Definitionen für Zeichen einer Objektsprache auf:

(Konverse) $$\mathrm{cnv}\,(F)(x, y) \equiv (F(y, x)) \tag{1}$$

(einmehrdeutig) $$\mathrm{Un}\,(F) \equiv (x)(y)(z)[(F(x, z) \,.\, F(y, z)) \supset (x = y)] \tag{2}$$

(eineindeutig) $$\mathrm{Unun}\,(F) \equiv (\mathrm{Un}\,(F) \,.\, \mathrm{Un}\,[\mathrm{cnv}\,(F)]) \tag{3}$$

(Korrelator) $$\begin{aligned}\mathrm{Korr}\,(H, F, G) \equiv (&\mathrm{Unun}\,(H) \,.\, (u)\,[(\exists v)(F(u, v) \vee F(v, u)) \\ &\equiv (\exists x)(H\,(u, x))] \,.\, (x)[(\exists y)(\mathrm{G}\,(x, y) \vee G(y, x)) \equiv (\exists u)(H(u, x))] \,. \\ &(u)(v)(x)(y)[(H(u, x) \,.\, H(v, y) \supset (F(u, v) \equiv G(x, y))]\end{aligned} \tag{4}$$

(Isomorphie) $$\mathrm{Is}\,(F, G) \equiv (\exists H)\,(\mathrm{Korr}\,(H, F, G)) \tag{5}$$

Diese Definitionen entsprechen (in etwas anderer Formulierung) den üblichen[14]). Wie wir vorher neben die relationstheoretischen Begriffe der Objektsprache (z. B. ‚Irr') entsprechende syntaktische Begriffe gesetzt haben (z. B. ‚G-irreflexiv' und ‚L-irreflexiv'), so müssen wir auch hier den Begriffen der Objektsprache, die durch (1)—(5) definiert sind, syntaktische Begriffe an die Seite stellen, die man früher nicht beachtet oder mit jenen vermengt hat. pr_1 sei ein homogenes pr_2. pr_2 heißt die G-Konverse von pr_1 wenn stets (d. h. hier und im Folgenden: für beliebige Argumente) $pr_2 (A_1, A_2)$ gehaltgleich mit $pr_1 (A_2, A_1)$ ist. pr_1 heißt G-einmehrdeutig, wenn A_1 und A_2 stets synonym in bezug auf die Klasse der beiden Sätze $pr_1 (A_1, A_3)$ und $pr_1 (A_2, A_3)$ sind (d. h. wenn zwei Sätze, von denen der eine aus dem andern entsteht, indem A_1 durch A_2 ersetzt wird, stets gehaltgleich in bezug auf die genannte Klasse sind). pr_1 heißt G-eineindeutig, wenn pr_1 und die G-Konverse von pr_1 G-einmehrdeutig sind. pr_1 und pr_2 seien homogene pr^n; dann heißt pr_3 ein G-Korrelator für pr_1 und pr_2, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. pr_3 ist ein G-eineindeutiges pr^2. 2. Ist A_1 ein passendes Argument für pr_1 so auch ein passendes Argument erster Stelle für pr_3, und umgekehrt. 3. Ist A_1 ein passendes Argument für pr_2 ,so auch ein passendes Argument zweiter Stelle für pr_3, und nmgekehrt. 4. $pr_1 (A_1, A_2, \ldots A_n)$ und $pr_2 (A_1', A_2', \ldots A_n')$ sind stets gehaltgleich in bezug auf die Klasse der Sätze $pr_3 (A_1, A_1')$, $pr_3 (A_2, A_2')$, ... $pr_3 (A_n, A_n')$. Zwei homogene pr^n pr_1 und pr_2 heißen **G-isomorph** miteinander, wenn es einen G-Korrelator für pr_1 und pr_2 gibt. — Zu jedem dieser G-Begriffe ist ein analoger L-Begriff zu definieren.

Satz 6: Die Sprache S enthalte ihre eigene Syntax. Wir wollen hier eine Wortsprache nehmen und anstatt. ‚Is (P, Q)' schreiben: ‚P und Q (nicht: ‚P' und ‚Q'!) sind isomorph'.] Dann gilt (in Analogie zu Satz 5*b*, *d*): sind ‚P' und ‚Q' G-(oder L-)isomorph, so sind P und Q isomorph; enthält S nur logische Zeichen, so gilt auch die Umkehrung.

Ein G-Korrelator für pr_1 und pr_2 ist ein Prädikat der Objektsprache. Im Unterschied dazu wollen wir unter einer syntaktischen Korrelation für zwei homogene pr^n pr_1 und pr_2 eine eineindeutige syntaktische Zuordnung Q_1 verstehen, die die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. Ist A_1 ein passendes Argument für pr_1, so ist $Q_1[A_1]$ (d. h. das Q_1 Korrelat von A_1) ein passendes Argument für pr_2. 2. Ist A_2 ein passendes Argument für pr_2, so gibt es ein passendes Argument A_1

[14]) Vg1. Anm. l3.

für pr_1 derart, daß $Q_1[A_1]$ A_2 ist. 3. pr_1 (A_1, A_2) ist stets gehaltgleich mit. pr_2 $(Q_1[A_1], Q_1 [A_2])$.
Zwei homogene pr^n pr_1 und pr_2 heißen syntaktisch-isomorph, wenn es für sie eine syntaktische Korrelation gibt (d. h. wenn eine solche Korrelation in der Syntaxsprache, die. wir dabei als hinreichend reichhaltig annehmen, definiert werden kann).
Wir wollen uns den Unterschied der Isomorphiebegriffe durch eine Gegenüberstellung deutlich machen ; sie ist analog der früheren, doch tritt hier noch eine dritte Begriffsart, die der syntaktischen Isomorphie, hinzu.

Die Beziehung der Isomorphie besteht zwischen gewissen (homogenen, zwei- oder mehrstelligen) Beziehungen.	1. Die Beziehung der G-Isomorphie besteht zwischen gewissen (homogenen, zwei- oder mehrstelligen) Prädikaten (nämlich Zeichen für Beziehungen). (Dasselbe gilt für L-Isomorphie.)
Diese Beziehung wird ausgedrückt durch das Symbol ‚Is‘ oder das Wort ‚isomorph‘; diese Zeichen gehören zur Objektsprache.	Diese Beziehung wird ausgedrückt durch das Wort ‚G-isomorph‘ ; dieses Wort gehört zur Syntaxsprache.
	2. Die Beziehung der syntaktischen Isomorphie besteht ebenfalls zwischen gewissen Prädikaten. Sie wird ausgedrückt durch das Wort ‚syntaktisch-isomorph‘; dieses gehört zur Syntaxsprache.

G-Isomorphie und syntaktische Isomorphie sind also beides syntaktische Begriffe, die sich auf Prädikate der Objektsprache beziehen. Der Unterschied beider Begriffe besteht darin, daß bei der G-Isomorphie die eineindeutige Zuordnung durch ein Prädikat der Objektsprache hergestellt wird, bei der syntaktischen Isomorphie dagegen durch beliebige syntaktische Begriffe. Es kann daher vorkommen, daß zwei Prädikate nicht G-isomorph sind, obwohl sie syntaktisch-isomorph sind; nämlich dann, wenn die Objektsprache keinen geeigneten Korrelator enthält. Da die meisten mathematischen Kalküle nur logische Zeichen enthalten, so stimmen bei ihnen nach Satz 6 Isomorphie und G-Isomorphie überein. [Genauer: sie gelten für entsprechende Paare: die Isomorphie für Beziehungen, die G-Isomorphie für die entsprechenden Prädikate[15]).]

[15]) In der Terminologie der „Syntax“ kann dieser Zusammenhang formal ausgedrückt werden: in einer Sprache mit nur logischen Zeichen ist ‚Is‘ quasi-syntaktisch; ‚G-isomorph‘ ist das zugeordnete syntaktische Prädikat.

Aber auch in diesem Fall muß der Unterschied zwischen G-Isomorphie und syntaktischer Isomorphie beachtet werden.

Satz 7: Sind zwei Prädikate G-(oder L-) isomorph, so auch syntaktisch-isomorph. Die Umkehrung gilt nicht allgemein (auch wenn die Sprache S nur logische Zeichen enthält).

8. Die über-abzählbaren Mächtigkeiten.

Wird der Unterschied zwischen G-Isomorphie und syntaktischer Isomorphie beachtet, so klären sich gewisse paradoxe Zusammenhänge in der Mengenlehre. Wir betrachten als Beispiel den Satz von der Mehrheit transfiniter Mächtigkeiten, der einen der Grundpfeiler der Mengenlehre bildet. Die pr^1 sind Bezeichnungen für Mengen; die Isomorphie zweier pr^1 entspricht der Gleichmächtigkeit (‚Äquivalenz' in der Terminologie der Mengenlehre). Als Objektsprache S werde das Axiomensystem der Mengenlehre von Fraenkel[16]) genommen, ergänzt durch einen Satz- und Funktionenkalkül (in Wortsprache). Der Satz, daß es mehr als Eine transfinite Mächtigkeit gibt, beruht auf dem Satz, daß die Potenzmenge U(M) einer Menge M (d. h. die Menge der Teilmengen von M) eine höhere Mächtigkeit hat als M; dieser Satz stützt sich auf den sog. Satz von Cantor, daß M und U (M) nicht gleichmächtig sein können. Fraenkel hat für diesen Satz einen Beweis gegeben[17]), der auch in seinem System S trotz Aufstellung des sog. Beschränktheitsaxioms[18]) gültig bleibt. Andrerseits aber kommen wir durch folgende Überlegung zu einem entgegengesetzten Ergebnis. Das Beschränktheitsaxiom besagt, daß in dem in S behandelten Mengenbereich, etwa B, nur diejenigen Mengen vorkommen, deren Existenz durch die andern Axiome gefordert ist. Hiernach gibt es aber in B nur folgende Mengen : erstens zwei Ausgangsmengen, nämlich die Nullmenge und die durch Axiom VII geforderte abzählbar-unendliche Menge Z; zweitens diejenigen Mengen, die sich auf Grund jener Ausgangsmengen durch beliebige, aber endlichmalige Anwendung gewisser Konstruktionsschritte bilden lassen. Dabei gibt es nur sechs Arten von Konstruktionsschritten (nämlich Bildung der Paarmenge, der Vereinigung, der Potenzmenge, der Aussonderungsmenge, der Auswahlmenge, der Ersetzungsmenge). Da hiernach nur abzählbar viele Mengen gebildet werden können, so gibt es nach dem Beschränktheitsaxiom in

---

[16]) Fraenkel, a.a.O. (s.Anm.7), § 16.

[17]) A. Fraenkel, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Zs. 22, 250-273, 1925.

[18]) Fraenkel, Mengenlehre, S.355.

B nur abzählbar viele Mengen, folglich auch höchstens abzählbar viele Teilmengen von Z. Also kann U (Z) keine höhere Mächtigkeit haben als Z. Man kann auch wirklich auf Grund der beiden Ausgangsmengen und der sechs Konstruktionsschritte leicht eine Abzählung aller Mengen von B herstellen und daher auch eine Abzählung der Teilmengen von Z. Auf Grund davon kann man die Teilmengen von Z den Elementen von Z eineindeutig zuordnen. Also sind U (Z) und Z gleichmächtig.

Dieses Ergebnis steht scheinbar in Widersprach zu dem Cantorschen Satz. Der Widerspruch verschwindet, sobald wir zwischen Gleichmächtigkeit und syntaktischer Gleichmächtigkeit unterscheiden. [Da S nur logische Zeichen enthält, stimmen Gleichmächtigkeit und G-Gleichmächtigkeit überein. Nach der Definition von Fraenkel[19]) sind zwei (elementfremde) Mengen M und N nur dann gleichmächtig, wenn es (in B!) eine abbildende Menge (also einen Korrelator) Q gibt, d. h. eine Menge von untereinander elementfremden Paaren $\{m, n\}$ derart, daß *m* alle Elemente von M, *n* alle Elemente von N durchläuft. Ist nun M abzählbar-unendlich, so läßt sich zwar in der vorhin angedeuteten Weise eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von M und denen der Potenzmenge U (M), also den Teilmengen von M, herstellen. Aber diese Zuordnung ist kein Korrelator in S, sondern eine syntaktische Korrelation. Es gibt in B keine Menge Q, die ein Korrelator für M und U (M) wäre; das ist durch Fraenkels Beweis gezeigt. Fraenkels Beweis und unsere Überlegung stehen nun nicht mehr im Widerspruch: M und U (M) sind zwar ungleichmächtig, aber syntaktisch gleichmächtig.

In der Syntax kann man für Ausdrücke irgend welcher Art stets eine Abzählung herstellen (z. B. in einer arithmetisierten Syntax auf Grund der Reihenzahlen der Ausdrücke). In bezug auf eine feste Syntaxsprache (eine solche muß ja für die Aufstellung des Systems S vorausgesetzt werden) ist daher jede Menge des Fraenkelschen Mengenbereichs B syntaktisch abzählbar; zwei transfinite Mengen sind stets syntaktisch gleichmächtig. Dies ist der richtige Kern in der Kritik der Intuitionisten am Begriff der über-abzählbaren Mächtigkeiten.

Die Ablehnung des Über-abzählbaren ist von Poincaré[20]) auf Grund seiner nominalistischen Auffassung vertreten worden, die er selbst — wohl nicht sehr glücklich — als idealistisch bezeichnet; ferner

---

[19]) a. a. O., S. 314.

[20]) H. Poincaré, Letzte Gedanken. Leipzig 1913. S. 108ff., 134ff.

von Brouwer[21]) u. a. Es ist aber zu beachten, daß die syntaktische Gleichmächtigkeit aller transfiniten Mengen von B (von einer festen Syntaxsprache aus) nicht im Widerspruch steht zu ihrer Ungleichmächtigkeit (innerhalb des Systems S), daß also die Unterscheidung verschiedener transfiniter Mächtigkeiten innerhalb eines Systems der Mengenlehre berechtigt ist. Und zwar ergibt sich in dem Axiomensystem von Fraenkel, das infolge des Beschränktheitsaxioms in einem gewissen, weiten Sinn konstruktiv ist, die Ungleichmächtigkeit gewisser Mengen, z. B. von Z und U (Z), durch eine gewisse Armut des Systems: es enthält keine Menge, die in den betreffenden Fällen als Korrelator dienen könnte. Bei nicht-konstruktiven Axiomensystemen, etwa bei einem System, das kein Beschränktheitsaxiom enthält und andrerseits in einem noch weiteren Maß mit Existenzaxiomen operiert, kann die Ungleichmächtigkeit etwa von M und U (M) umgekehrt an einem gewissen Reichtum des Systems liegen: U (M) enthält so viele Elementmengen, daß sie den Elementen von M nicht eineindeutig zugeordnet werden können. Das ist allerdings nicht in dem Sinn möglich, als könne es in dem betreffenden System einen solchen Reichtum an Mengen bezeichnungen geben; die Anzahl der Mengenbezeichnungen ist ja in jedem System abzählbar. Vielmehr ist der Reichtum ein nur axiomatisch angesetzter, nicht durch Benennungen (Namen oder Kennzeichnungen) anfweisbarer.

Ferner ist zu beachten, daß der Unterschied z. B. zwischen der Menge der natürlichen Zahlen, der der reellen Zahlen, der der Funktionen reeller Zahlen usf., den Cantor aufgewiesen und durch Zuweisung verschiedener Mächtigkeiten formuliert hat, auch syntaktisch erfaßbar ist. Dieser Unterschied ist besonders bedeutsam für die syntaktische Untersuchung einer Reihe von Sprachen, von denen jede in der folgenden als echte Teilsprache enthalten ist. Derjenige Charakter der Klasse der zfu^1, den Cantor als Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen bezeichnet, kommt z. B. in einer aufsteigenden Reihe von Sprachen dadurch zum Ausdruck, daß jede Sprache der Reihe außer den abzählbar vielen zfu^1 der vorhergehenden Sprache stets neue zfu^1 enthalten kann (vgl. hierzu die früheren Überlegungen über Diagonalverfahren, Antinomie von Richard, Lückenhaftigkeit der Arithmetik; vgl. Satz 2 und 3).

Durch die Unterscheidung zwischen Abzählbarkeit (in dem betreffenden System) und syntaktischer Abzählbarkeit verschwindet

---

[21]) L. E. J. Brouwer, Intuitionism and Formalism. Bull. Amer. Matte. Soc. 20, 81-96, 1913.

auch das Paradoxe an dem bekannten Löwenheim-Skolemschen Satz[22]. Dieser Satz besagt ungefähr, daß es für ein widerspruchsfreies Axiomensystem S der Mengenlehre stets schon in einem abzählbaren Bereich ein Modell gibt. Hierbei wird jedoch das Modell nicht durch Begriffe von S konstruiert, sondern durch Überlegungen über S, also durch syntaktische Begriffe. Und die Abzählbarkeit des Bereiches, aus dessen Elementen das Modell besteht, wird nicht durch Aufweisung eines Korrelators in S nachgewiesen, sondern durch den Nachweis der Herstellbarkeit einer syntaktischen Korrelation. Es ist somit nicht die Abzählbarkeit (in S) eines Modells erwiesen, sondern nur die syntaktische Abzählbarkeit. Der Satz von Skolem widerspricht daher nicht dem Satz von Cantor (und dem Beweis von Fraenkel).

[22]) Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze. Vidensk. Skr. Kristiania 1920. Nr. 4. — Vgl. auch Fraenkel, a. a.O., S.333.

(Eingegangen: 4. VI. 1934.)