Carnap Project: Benson No. 1931-2

Besprechungen: A. N. Whitehead and B. Russell: Principia Mathematica (1931)

Rudolf Carnap

[Note: This document was created from a scanned Word document, and has yet to be compared to an original—L.H.]

Die P. M., die zuerst 1910/13 erschienen, sind das grundlegende Werk, an das die meisten späteren Arbeiten auf dem Gebiet der formalen Logik und besonders auf dem Gebiet der Grundlagenfragen der Mathematik durch Anlehnung oder Kritik angeknüpft haben. Dieses Werk stellt den ersten Versuch dar, ein vollständiges System der Logik, das die Mathematik mitumfaßt, aufzubauen, wobei hauptsächlich die Vorarbeiten *Freges* und *Peanos* verwertet werden. (Ein früher angekündigter vierter Band, der die Geometrie behandeln sollte, ist nicht erschienen.) Ober die „logizistische" Auffassung, die dem Werk zugrunde liegt, über die Methode des Aufbaus und auch die Schwierigkeiten, die sich ihm in den Weg stellen, ist an anderer Stelle ausführlicher berichtet worden[1]). Deshalb beschränken wir uns hier darauf, die Änderungen in der Auffassung von *Russell*, die in den Einfügungen der 2. Auflage zutage treten, zu besprechen.

Die 2. Auflage unterscheidet sich von der I. nur durch die Einfügung einer

[1] *Carnap*, Die logizistische Grundlegung der Mathematik. Dieser Band, Heft 2/3

Einleitung (Introduction, S. XIII-XLVI) und dreier Anhänge (Appendix A, S.635-649; B, S. 650- 658; C, S.659-666) in den ersten Band; am Textteil von Band I, sowie an Band II und III ist nichts geändert.

In der neuen *Einleitung* werden zunächst die wichtigsten *Verbesserungen*, die die mathematische Logik in der Zwischenzeit erfahren hat, angeführt: I. *Sheffer* hat 1913 gezeigt, daß an Stelle der beiden Grundbegriffe „*non-p*" und „p oder q" ein einziger treten kann: „p und q sind unverträglich (incompatible)" (oder auch: „p und q sind beide falsch"). 2. Daraufhin hat *Nicod* (1920) gezeigt, daß die 5 formalen Axiome der Aussagentheorie durch ein einziges ersetzt werden können. Hieraus ergibt sich eine bedeutende Vereinfachung in der Bildung zusammengesetzter Sätze. 3. Die Unterscheidung zwischen wirklichen (freien) und scheinbaren (gebundenen) Variabeln wird unnötig; das Schreiben einer wirklichen Variabeln in einem Satz wird jetzt als bloße Schriftabkürzung (Weglassung des Allzeichens) aufgefaßt.

Eine noch ungelöste Schwierigkeit bildet das *Reduzibilitätsaxiom*. Es ist aus philosophischen Gründen abzulehnen. Streichen wir es jedoch ohne Ersatz, so fallen große Teile der Mathematik fort. Vielleicht hilft in dieser Schwierigkeit eine Annahme von *Wittgenstein*[2]), nämlich die, daß alle Funktionen von Sätzen Wahrheitsfunktionen sind, daß eine Funktion in einem Satz nur durch ihre Werte auftreten kann, daß alle Funktionen von Funktionen extensional sind. (F (y) heißt extensional, wenn für zwei beliebige generell äquivalente Funktionen f (x) und g (x) die Sätze F (f) und F (g) stets denselben Wahrheitswert haben.)

[2] *Wittgenstein*, Tractatus logico-philosophicus. London 1922. (Vgl. die Inhaltsangabe: Erkenntnis I, S. 334). Hierzu vor allem *5. 54 ff. und *Russells* Vorwort S. 19-21.

Diese Extensionalitätsthese widerspricht *Russells* früherer Auffassung; z. B. ergibt sich aus ihr, daß „A glaubt p“ nicht eine Funktion von p ist.

Die Gründe für und gegen die These werden in Anhang C erörtert. Ist jede Funktion von Sätzen eine Wahrheitsfunktion, so sind Sätze, die gleichen Wahrheitswert haben, (auf Grund der bekannten *Russell*schen Definition der Identität als bereinstimmung in allen Eigenschaften) identisch. Das war auch *Freges* Ansicht, ist aber wenig einleuchtend. Die Analyse der scheinbaren Gegenbeispiele „A glaubt p“ und „p spricht von A“ zeigt, daß hier „p“ nicht als Satz im logischen Sinn, nämlich als Vehikel für Wahrheit oder Falschheit, sondern als Tatsache auftritt. Die Beispiele widerlegen daher die These nicht.

Die *Wittgenstein*sche Annahme wird als noch nicht gesichert angesehen. Doch werden im Fortgang der Einleitung die Folgen erörtert (und in Anhang A und B für bestimmte Abschnitte formal durchgeführt), die sich aus ihr und den übrigen genannten Verbesserungen für den Aufbau des Systems ergeben.

In der Theorie der Klassen tritt einerseits eine Vereinfachung, andererseits eine Erschwerung ein. Bei Annahme der Extensionalitätsthese fällt nämlich der Unterschied zwischen Funktion und Klasse fort; denn wenn zwei Funktionen generell äquivalent sind, so sind nicht nur ihre Klassen, sondern sie selbst identisch. Andererseits müssen wir nach Wegfall des Reduzibilitätsaxioms, da die verzweigte Typentheorie beibehalten wird, einen Unterschied zwischen Klassen verschiedener Ordnung, deren Elemente von derselben Ordnung sind, machen. Dadurch fallen viele Sätze der Mengenlehre weg, z. B. der *Cantor*sche Satz, daß $2^n > n$.

Die Theorie der mathematischen Induktion auf Grund des Begriffes der erblichen Eigenschaften bleibt bestehen. Doch müssen viele Sätze jetzt anders bewiesen werden (Anhang B). Dagegen kann die Theorie der *Dedekind*schen und der wohlgeordneten Reihen nicht mehr im alten Umfang durchgeführt werden. Auf ihr beruht aber die Theorie der reellen Zahlen, die damit auch zum großen Teil wegfällt. Der Satz, daß die Reihe der reellen Zahlen *Dedekind*sche Stetigkeit besitzt, läßt sich nicht mehr beweisen. Die Analysis bricht so zusammen. Sie kann aber vernünftigerweise nicht ernstlich angezweifelt werden. Daher wird vermutet, daß es ein wahres logisches Axiom gibt, das schwächer ist als das Reduzibilitätsaxiom, aber in den angegebenen Punkten dieses zu ersetzen vermag. Es bleibt die Aufgabe, dieses Axiom zu suchen.—

Dies der Inhalt der *Russell*schen Darlegungen. Eine historische und systematische Orientierung über die hier aufgeworfenen Fragen, vor allem über die mit dem Reduzibilitätsaxiom und der verzweigten Typentheorie zusammenhängenden Schwierigkeiten („nichtprädikative Begriffsbildungen“) gibt *Fraenkel*[3]), unter Mitberücksichtigung der neueren Literatur. Einen großzügigen Versuch zur Lösung der Schwierigkeiten hat, teilweise an Wittgenstein anknüpfend, *Ramsey*[4]) gemacht. Er läßt nicht nur das Reduzibilitätsaxiom, sondern auch die verzweigte Typentheorie fallen. Seine Gesamtauffassung hat wenig Anklang gefunden; doch bleiben verschiedene seiner Ergebnisse gültig und wichtig. Es erscheint nicht ausgeschlossen, die Ausschaltung von Reduzibilitätsaxiom und verzweigter Typentheorie auch von anderen, bescheideneren Annahmen aus zu erreichen[5]).

---

[3]A. *Fraenkel* , Einleitung in die Mengenlehre. Berlin 1928. Siehe §15.

[4]F. P. *Ramsey*, The foundations of mathematics. Proc. London Math. Soc., XXV, S. 338-384, 1926.

[5]Vgl. Carnap, a. a. O.

Zur Erleichterung des Studiums der „*Principia Mathematica*“ sind hier die für den *Aufbau der Mathematik* wichtigsten Abschnitte zusammengestellt. (Die Nummerierung der Seiten und der Paragraphen ist in beiden Auflagen gleich. Die fettgedruckten Buchstaben und Ziffern bezeichnen die wichtigsten Abschnitte.)

Vol. I. Introduction (2nd ed.: p. XIII f.) p. 1-3. Ch. I, p. 4-17 Mitte, 20 unten bis 36. (Ch. II, §I, II, IV, V, VIII). Ch. III, p. 66-70 Mitte; 71 unten bis 74.

Part I: Mathematical Logic. Summary p. 87-89; Section A §1-4, (5); B §9, 10, 11, 12, 13, 14. C §20-25; D §30-34, 35, 36, 37, 38; Note p. 299-301; E §40, 41, (42, 43).

Part II: Prolegomena to Cardinal Arithmetic. Summary p. 329-330. A §50-52, 54, 55, 56; B §60, 61, (62-65); C §70, 71, (72), 73, (74); D §80, (81, 82), 83, 84, (85), 88; E §90, 91, (92), 93, (94, 95). 96. 97.

Vol. II, Part III. Cardinal Arithmetic. A §100, 101, (102-105); B §110, 111, 112, 113, 114- 116, 117; C §(118), 119, 120, 121, 122–124, 125, (126).

Part IV: Relation Arithmetic. A §150-152, 153, (154-155); B §160, 161, (162-165), 166; C §(170-177); D §180 (181-186).

Part V: Series. A §200-202, 204, 205-207, (208); B §(210) 211, 212, (213), 214, 215; C Summary p. 687-691. Vol. III, D §250, 251, 256, 257,258; E Summary p. 108; §263, (265); F §270, (271, 272), 273, (274), 275, (276).

Part VI: Quantity. A §300, 301, (302),303, 304, (305-309), 310, (311-313).