Carnap Project: Benson No. 1930-6

Diskussion über Wahrscheinlichkeit (1930)

Rudolf Carnap

[Note: This document was created from a scanned Word document, and has yet to be compared to an original—L.H.]

(Sonntag, 15. Sept. 1929)

ZILSEL: Groß zügig betrachtet stehen sich zwei Hauptauffassungen der Wahrscheinlichkeitsprobleme gegenüber: I. die apriorische Theorie, die in der Wahrscheinlichkeit einen logischen „Grundbegriff " sieht und daher mit apriorischen Wahrscheinlichkeiten, „vernunftgemäßen Erwartungen " und dergleichen operiert; (Typus: Keynes); 2. die statistische Theorie, die Wahrscheinlichkeit durch Häufigkeitsperzentsätze in großen Serien definiert (Typus: v. Mises).

Zu I. Aus apriorischen Wahrscheinlichkeiten kann niemals etwas über ein reales Naturverhalten folgen. Selbst wenn Wahrscheinlichkeit ein glatt hinzunehmender logischer Grundbegriff wäre, wäre er ganz uninteressant. Ich habe niemals verstanden, wie man durch noch so viele logische und mathematische Operationen aus Sätzen über Erwartungen herauspressen kann, was sich in einer Serie von Münzenwürfen wirklich ereignet. Nur das ist aber das wissenschaftliche Problem. Eine Wahrscheinlichkeit, die etwas anderes ist als ein Häufigkeitsperzentsatz, ist ein leeres Wort. Das wird nur durch allerlei verschwommene Gefühle verschleiert, die sich an dieses Wort heften.

Zu 2. Die statistische Theorie macht Aussagen über Resultate von Münzenwürfen. Daher ist nur eine statistische Definition des Wahrscheinlichkeitsbruches brauchbar und fruchtbar. Die bisher ausgeführten Theorien dieses Typus sind freilich von intern mathematischen Bedenken nicht frei. Darüber soll jedoch im folgenden nicht gesprochen werden. Hingewiesen soll werden auf einige allgemeinere Probleme, die mit der Problematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung unlösbar verbunden sind, ja ihr zugrunde liegen.

Es sei gelungen, auf Grund der bisherigen Rouletteresultate exakt formulierte Sätze über die Häufigkeitsperzentsätze bei allen Roulettespielen auszusprechen. Wieso aber kann man gleichartige Sätze auch über Zufallsspiele aussagen, die sicherlich noch nie gespielt wurden? Beispiel: ein musikalisches Roulette, bei dem statt auf Farben auf Töne gewettet wird, die die Kugel zum Erklingen bringt. Eine Theorie, die vollständig sein will, muß ferner darüber Rechenschaft geben, wieso die Häufigkeitsperzentsätze bei Zufallsspielen einen so apriorischen Eindruck machen. Es ist doch gewiß merkwürdig, daß beim Würfeln nicht nur die relative Häufigkeit der Würfelresultate 1/6 beträgt, sondern sonderbarerweise auch gerade 6, zwar verschieden bemalte aber sonst symmetrische Würfelflächen auftreten. Selbstverständlich darf man deshalb nicht wieder, offen oder versteckt, in die apriorische Theorie zurückverfallen. Was hier wirklich vorliegt, ist ein andrer Umstand. Häufigkeitsansätze sind bisweilen auch auf Induktionen begründet, die besagen: der Ton, mit dem die Bewegung eines Körpers endet, hat keinen Einfluß auf die zurückgelegte Bahn; nicht Oberflächenfärbung, sondern die

Schwerpunktslage beeinflußt die Fallbewegung und dergleichen. Diese Induktionen aber sind nicht bloß aus Serien des in Frage stehenden Zufallsspieles gewonnen, sondern ruhen auf allgemeinerem Beobachtungsmaterial: Sie verwenden. Alltagserfah- rungen über bewegte Körper aller Arten. Das heißt also: eine vollständige Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung darf sich nicht bloß mit dem gerade in Frage stehenden Zufallsspiel beschäftigen, sondern muß sich auch mit weiteren Problemen, zunächst mit dem allgemeinen Induktionsproblem auseinandersetzen.

a) Induktion. Es ist eine Natur denkbar, in der die gleichen physikalischen Gesetze gelten, wie in der unsrigen, in der sie aber für Menschen nicht auffindbar sind, weil alle Induktionen immer wieder versagen. Beispiel bis zum Jahre 1929 habe ausnahmslos immer, wenn ein Glasstab einer Magnetnadel genähert wurde, gerade ein magnetisches Gewitter die Nadel stark abgelenkt. Dann sind Gesetze über den Magnetismus nicht auffindbar, nicht induzierbar. Wir sind offenbar überzeugt oder hoffen, daß die Natur nicht auf diese sonderbare Art konstelliert ist. Die andere Konstellation, von der wir meinen, daß sie besteht, und die überall verwirklicht sein muß, wo Induktionen erfolgreich sind, hängt deutlich mit dem Zufallsausgleich", dem Gesetz der großen Zahlen zusammen. Sie wäre exakt zu formulieren.

b) Makrogesetze. Boltzmann hat gezeigt, daß jedes isolierte Makrosystem, wenn genügend viel Zeit verstreicht, ungeheuer selten, aber immer wieder alle Makrogesetze durchbricht. Beispiel: ein gleichmäßig belasteter Hebel wird im Verlauf der thermischen Mikrobewegung seiner Teilchen plötzlich unter Abkühlung stark ausschlagen. Solche Durchbrechungen sind jedoch nur deshalb ungeheuer selten, weil die Mikrobestandteile eigenartig konstelliert sind (Unordnungsvoraussetzung, Ergodenhypothese oder verwandte Annahmen); in einer anders gebauten Welt könnten sie auch bei gleichen Mikrogesetzen beliebig häufig eintreten. Mikrobestandteile lassen sich also nur dann zu beharrenden Makrogebilden zusammenfassen, die—mit sehr seltenen Ausnahmen—festen Makrogesetzen unterliegen, wenn sie auf eine gewisse Weise konstelliert sind. Diese Konstellation wäre exakt zu formulieren

c) Meßbarkeit der physikalischen Größen (vgl. die Arbeiten Reichenbachs). Jede physikalische Messung, die nicht bloß vergangene Ablesungen an Meßapparaten schildern, sondern besagen will, daß eine reale Größe auch in der Zukunft sich gleichbleiben wird, setzt Ausgleich der Meßfehler voraus. Naturgesetze lassen sich also nur dann quantitativ fassen, wenn die Welt auf eine gewisse Weise konstelliert ist. Diese Konstellation wäre exakt zu formulieren.

Zusammenfassung: Der Wahrscheinlichkeit selbst läßt sich reale Bedeutung nur verleihen, wenn man sie statistisch durch Häufigkeitsperzentsätze in großen Serien definiert. Von einer wirklich befriedigenden Theorie ist aber zu fordern, daß sie mit Hilfe der so gewonnenen präzisen Begriffe auch des allgemeinen Induktionsproblems Herr wird.

Man kann induzieren, Naturgesetze lassen sich von Menschen auffinden, Makrogesetze sind quantitativ faßbar nur dort, wo die Natur auf eine gewisse Weise konstelliert ist. Diese Konstellation hängt deutlich mit „Abwechslung“, „Zufallsausgleich“, „Unordnung “ und dergleichen zusammen; es ist die gleiche Konstellation, die bei den Zufallsspielen in der Konstanz der Häufigkeitsperzentsätze sich ausprägt. Hume hat gezeigt, daß jede Induktion auf Glauben beruht. Daß wir glauben, ist eine Angelegenheit, die nur praktisch für unser Reagieren bedeutsam ist; auch Wissenschaft-Treiben ist ein solches Reagieren. Was wir aber eigentlich glauben, das sollte die Wissenschaft endlich einmal feststellen. Wir glauben beim Induzieren an eine eigenartige Konstellation der Natur, die statistisch durch eine Häufigkeitsaussage zu präzisieren wäre. Diese Präzisierung ist völlig einwandfrei bisher noch nicht gelungen.

Zum Vortrag Waismann: Herr Waismann hat die Wahrscheinscheinlichkeit durch Spielraumquotienten apriorisch definiert und hat sodann die Metrik—der Physiker würde sagen: die „Gewichte "—der Spielräume den statistisch beobachteten relativen Häufigkeiten konventionalistisch angepaßt. Auf diese Weise will er sowohl der apriorischen als der Häufigkeitstheorie gerecht werden. Er hat jedoch eine Frage nicht beantwortet: warum folgt nichts über die Spielraummetrik, wenn beim Würfeln unter 6 Würfen 4mal ein Dreier auffällt, warum aber doch, wenn dies unter 6000 Würfen 4000 mal eintritt? Die „großen Zahlen", die hier plötzlich auftauchen, zeigen wieder die unlösbare Verflechtung des Wahrscheinlichkeits- mit dem Induktionsproblem. Warum induzieren wir im allgemeinen erfolgreicher aus vielen Fällen als aus wenigen? Ohne eine Beantwortung dieser Frage—die über den Konventionalismus, den Herr Waismann vertritt, hinausführen muß–wird sich eine wirklich befriedigende Theorie der Wahrscheinlichkeit wohl nicht entwickeln lassen.

REICHENBACH: Die Ausführungen von Herrn Waismann bedeuten einen Versuch, die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie mit den Mitteln der mathematischen Logik wieder aufzurichten. Wenn auch die Anwendung mathematisch-logischer Methoden diesem Gedankengang eine große Strenge verleiht, so scheint er mir doch in seinem Ausgangspunkt nicht zu halten. Es gelten alle Einwände, die gegen die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie erhoben worden sind: es bleibt unverständlich, wie es kommt, daß den auf subjektives Nichtwissen begründeten Wahrscheinlichkeitssätzen eine Bedeutung für die Welt der wirklichen Dinge, des zukünftigen Geschehens zukommt. Sodann tritt die Unzulänglichkeit der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie deutlich noch an der Stelle der Waismannschen Ausführungen hervor, wo das Maß der Wahrscheinlichkeit begründet werden soll; es bleibt unverständlich, nach welchen Gesichtspunkten eigentlich dieses Maß gewählt wird, warum z. B. den Würfelseiten gleiche Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Weiterhin macht Herr Waismann, um die Schwierigkeiten in der bereinstimmung von Wahrscheinlichkeitsansatz und Häufigkeit zu beheben, den Versuch einer konventionalistischen Begründung dieser bereinstimmung: man deutet danach die Erscheinungen so lange, bis bereinstimmung mit dem Induktionsprinzip erreicht ist. Diese Begründung scheitert vor der Tatsache, daß die bereinstimmung immer nur für den vorhandenen Bestand von Beobachtungen konstruiert werden kann, nicht aber für noch unbekannte zukünftige Beobachtungen.

Wenn die subjektive Theorie diesen Schwierigkeiten entgehen will, muß sie nicht nur die Begründung der Wahrscheinlichkeitsansätze, sondern auch ihre Bedeutung subjektiv auffassen. Danach beruht nicht nur die Begründung des Wahrscheinlichkeitsmaßes 1/6 für die Würfelseite auf subjektiver Unwissenheit, sondern auch die Bedeutung des Satzes „die Würfelseite ist mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 zu erwarten“, besteht in weiter nichts als eben in einem Bericht der Tatsache, daß ich über die Würfelseiten gleich wenig weiß. Wenn dies die Auffassung von Herrn Waismann ist, so ist seine Theorie allerdings widerspruchslos. Aber die Auffassung der Wahrscheinlichkeitssätze als eines bloßen Berichts über den Wissensbestand eines Beobachters entspricht nicht dem tatsächlichen Gebrauch des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Wissenschaft. Denn dem Wissenschaftler ist es gerade darum zu tun, Gesetze zu finden, die sich auch bei zukünftigen Beobachtungen bewähren; wenn er diesen Glauben an das Induktionsprinzip nicht hätte, bliebe es völlig unverständlich, warum er als Ordnungsprinzip aller Beobachtungsbestände gerade das Induktionsprinzip benutzt.

DUBISLAV: Im folgenden will ich, fußend auf einschlägigen berlegungen Bolzanos[1]), eine Charakterisierung der Wahrscheinlichkeitsbeziehung geben, die diejenige von Herrn F. Waismann—er setzt diese Beziehung nur zwischen Sätzen an—als einen Spezialfall enthält.

Die zu charakterisierende Beziehung, sie wird sich als eine gegebenenfalls zwischen Satzfunktionen bestehende Beziehung erweisen, wird aus naheliegenden Gründen mindestens folgenden Forderungen zu genügen haben.

A. Die gesuchte Beziehung hat die Ableitbarkeitsbeziehung als einen Spezialfall derart zu enthalten, daß eine Ableitbarkeitsbeziehung aufgefaßt werden kann als eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung, die den numerischen Wert eins hat, wobei aber die Umkehrung hiervon nicht in jedem Falle zu gelten braucht.

B. Wenn die gesuchte Beziehung mit numerischen Werten behaftet werden kann, dann jeweils nur mit solchen, die im Intervall 0,1 liegen, die Grenzen inklusive.

Gegeben seien nun zwei Satzfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ derselben Variablen x. Wir sagen: Zwischen $f(x)$ und $g(x)$ besteht in dieser Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung, wenn nachstehendes zutrifft:

[1]Bolzano, Wissenschaftslehre, 1837, §161.

Ia. Wenn wir die Menge der Werte der Variablen x, die die Satzfunktion $f(x)$ befriedigen; Mf nennen, und wenn wir die Menge der Werte derselben Variablen x, die sowohl die Satzfunktion $f(x)$ wie die Satzfunktion $g(x)$ befriedigen, mit $M_f g$ bezeichnen, und wenn die Menge M_f eine endliche ist, dann ist die Menge $M_f g$ größer als eine Menge, die mindestens halb so groß ist, als die Menge M_f—Oder

Ib. Die beiden Mengen M_f wie $M_f g$ sind unendliche Mengen. Nach Maßgabe des von Bolzano angegebenen, hier nicht näher zu beschreibenden Verfahrens[2]) läßt sich ermitteln, daß das Verhältnis von $M_f g$ zu M_f einen Wert größer als 1/2, aber kleiner oder gleich I zu bekommen hat.

Man sieht ein, daß eine derartige Wahrscheinlichkeitsbeziehung die sog. Ableitbarkeitsbeziehung als einen Spezialfall enthält. Denn zu sagen, daß zwischen den Satzfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dieser Reihenfolge die Ableitbarkeitsbeziehung besteht, das bedeutet: Die Menge $M_f g$ ist identisch mit der Menge M_f. Anders ausgedrückt: Die Menge der Werte, die die Satzfunktion $f(x)$ befriedigen, ist identisch mit der Menge der Werte, die sowohl die Satzfunktion $f(x)$ als auch die Satzfunktion $g(x)$ befriedigen. Dafür könnte man auch ebensogut sagen, daß die Menge der Werte, die die Satzfunktion $f(x)$ befriedigen, eine Teilmenge ist von der Menge der Werte, die die Satzfunktion $g(x)$ befriedigen.

Man kann die oben angegebene Definition der Wahrscheinlichkeitsbeziehung auch noch auf Satzfunktionen mehrerer Variablen wie auf Systeme derartiger Satzfunktionen erweitern.

Die ursprünglich nur zwischen Satzfunktionen gegebenenfalls bestehende

[2]Vgl. Bolzano, Wissenschaftslehre, 1837, §161, Absatz 7. Erkenntnis I.

Wahrscheinlichkeitsbeziehung läßt sich auch auf Sätze ausdehnen. Man wird im einfachsten Falle sagen, daß zwischen den beiden Sätzen $f(a)$ und $g(a)$, die durch ein und dieselbe Einsetzung aus den Satzfunktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ hervorgehen, in dieser Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung besteht, wenn eine solche zwischen den beiden Satzfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dieser Reihenfolge besteht.

Man wird schließlich von Gegenständen G_1 und G_2 (in dem weiten Sinne von „Etwassen", also gleichgültig, ob sie Vorgänge oder Dinge usw. sind) sagen, daß zwischen ihnen in dieser Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung obwaltet, wenn diese beiden Gegenstände im Rahmen einer Theorie durch zwei Behauptungen B_1 bzw. B_2 zutreffend beschrieben werden können, zwischen denen in dieser Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung besteht.

Ob man und wenn ja, wie man die von K. Dörge und R. von Mises gegebene Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der oben angegebenen Definition der Wahrscheinlichkeits- beziehung vereinen kann, bleibe späteren Untersuchungen vorbehalten.

(Montag, 16. Sept. 1929)

HÄRLEN: Herr Zilsel hat das Klangroulette erfunden; er will aber darauf verzichten, es auszuprobieren. Wenn er trotzdem Wahrscheinlichkeitsaussagen darüber macht und sie für richtig hält, so beweist das höchstens die große Kraft seines Glaubens. Tatsächlich sind die wirklich feststellbaren sog. Wahrscheinlichkeitsgesetze nicht anderes als zusammenfassende Berizhte über schon Bekanntes, Vergangenes oder Gegenwärtiges. Ihr Wert für den experimentierenden Physiker ist deshalb äußerst gering.

Eigentlich ist unsere Behauptung eine Trivialität. Festgestellt kann selbstverständlich nur werden, was schon wirklich ist; nicht, was erst Wirklichkeit werden soll. Daran kann auch nichts ändern, daß es sich ja nur um Wahrscheinlichkeitsgesetze handeln soll. Wenn Wahrscheinlichkeitsaussagen als Prophezeiungen aufgefaßt werden sollen, dann können sie gegenwärtig nicht prüfbar sein, sie sind also keine Gesetze. Das bedeutet, daß immer nur eines der Probleme, Sinn- und Geltungsproblem, positiv gelöst werden kann.

Das ist eine allgemeine Tatsache, die für jede Theorie gilt, nicht nur für Wahrscheinlichkeitstheorien. Eine sinnvolle Theorie entsteht ja dadurch, daß wir durch Anordnung der Erfahrungstatsachen, unserer Erlebnisinhalte, einen Zusammenhang zwischen ihnen herstellen. Dieser Zusammenhang wird also erst durch uns geschaffen; ob er wirklich vorhanden ist, entzieht sich unserer Kenntnis. Wir können nur feststellen, daß unsere Erlebnisinhalte so beschaffen sind, daß sie sich in die Art unserer Anordnung fügen.— Psychologisch ist es ja allerdings so, daß wir uns bei der Anordnung viel weniger aktiv verhalten, als es eben dargestellt wurde; vielmehr werden uns gewisse Anordnungsmöglichkeiten geradezu aufgedrungen. Aber das ist eine psychologische Tatsache, die schon über den Rahmen des logischen Erfaßbaren hinausgeht. Logisch gesehen sind die Zusammenhänge, die unsere Theorien zwischen den Erfahrungstatsachen dar- oder herstellen, nichts anderes als unsere willkürlichen Schöpfungen.

Wenn wir nicht die Hände in den Schoß legen wollen, dann bleibt uns faktisch nichts anderes übrig, als gewisse transzendente Annahmen zu machen. Wir müssen also an die künftige Gültigkeit des Zusammenhangs glauben, den unsere Theorie hergestellt hat; und allerdings ist dabei der Wunsch der

Vater des Glaubens. Oder wir müssen doch wenigstens so tun, als ob dieser Zusammenhang auch zukünftig bestehen würde. Wir nehmen also aus Zweckmäßigkeits- gründen als gewiß an, was tatsächlich nicht feststellbar ist; wobei uns bewußt bleiben können, daß es sich um eine willkürliche Annahme handelt. Das ist Pragmatismus, aber noch kein Fiktionalismus. Denn es handelt sich ja um Hypothesen, mögliche Annahmen, nicht um Fiktionen, bewußt falsche Angahmen. Es ist nämlich prinzipiell genau so wenig möglich, die Ungültigkeit des Zusammenhangs festzustellen wie seine Gültigkeit.

Was allgemein für jede Theorie gilt, das gilt auch für Wahrscheinlichkeitsaussagen. Tatsächlich enthält ja jede Wahrscheinlichkeitsaussagen die mit ihr gleichbedeutende bestimmte Aussage, daß ein Ereignis mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintritt.—Es scheint mir sogar, daß durch die Wahrscheinlichkeitslehre der Abgrund zwischen Theorie und Wirklichkeit erst voll in Erscheinung tritt. Herr Feigl hat gestern gesagt, bei unwahrscheinlichen Zuständen müßten wir die Hände in den Schoß legen. Tatsächlich müßten wir das jeden Augenblick, wenn wir nicht von jedem Augen- blick annehmen würden, daß er nicht einer Unwahrscheinlichkeitsperiod angehört. Es wäre ja denkbar, daß die kurze Zeitspanne seit Beginn der Eiszeit eine solche Periode ist, die heute aufhört, und daß wir von morgen an ganz neue physikalische Gesetzmäßigkeiten vorfinden. Trotzdem nehmen wir aber heute an, wir befänden uns in keinem unwahrscheinlichen Zustand, und stützen auf diese Annahme Wahrscheinlichkeitsschlüsse über das morgige Geschehen.

Ich möchte noch auf die immer noch sehr lesenswerte Schrift von Herrn Lukasiewicz aufmerksam machen (Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Krakau 1913, Akad. d. Wiss.), in der Wahrscheinlichkeitssätze als unbestimmte Aussagen, Wahrscheinlichkeiten als ihre Wahrheitswerte behandelt werden. In Zusammenhang damit stehen die Warschauer Untersuchungen über mehrwertige Logik.—Die Diskussion über den Satz vom ausgeschlossenen Dritten hat ergeben, daß die mehrwertige Logik als Teil der zweiwertigen anzusehen ist und nicht ganz unabhängig von ihr aufgebaut werden kann. Ebenso ist auch die Alternative „strenge Logik mit praktischem Unsicherheitsfaktor oder Wahrscheinlichkeitslogik?“ nicht sachgemäß. Vielmehr liegt der Wahrscheinlichkeitslogik immer schon die strenge Logik zugrunde. Das steht in Einklang mit der obigen Feststellung, daß jeder Wahrscheinlichkeitsaussage eine bestimmte Aussage entspricht.

CARNAP: Ich möchte an die Ausführungen der Herren Reichenbach und Waismann anknüpfend, zu zwei Punkten in den Ausführungen von Herrn Reichenbach kritisch Stellung nehmen, doch möchte ich zuvor nachdrücklich betonen, daß, wir in vielen Grundfragen übereinstimmen; das zeigt sich ja auch schon in der gemeinsamen Veranstaltung dieser Tagung. Ich knüpfe an zwei Punkte an, die mir von grundsätzlicher Bedeutung zu sein scheinen, da sie logische Fragen betreffen. Herr Reichenbach hat gesagt, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Zukunft durch Erfahrung, d. h. durch zukünftige Erlebnisse, weder bestätigt noch widerlegt werden können. Da die Zeit nicht ausreicht für die Begründung einer Gegenauffassung, begnüge ich mich damit, eine Frage zu stellen. Dabei will ich mich nicht auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff beschränken, sondern die Frage als eine allgemein erkenntnistheoretische Frage formulieren: Sind Sie der Meinung, daß eine Aussage einen Sinn haben kann, wenn sie grundsätzlich nicht verifizierbar ist, d. h. wenn es nicht einmal denkbar ist, daß sie durch eine bisherige oder künftige Erfahrung bestätigt oder widerlegt wird? Meiner Meinung nach liegt der Sinn jeder Aussage nur darin, daß sie uns etwas über mögliche Erlebnisinhalte sagt, wobei die Aussage als bestätigt gilt, wenn die Erlebnisinhalte eintreten, andernfalls als widerlegt. Würde eine Aussage nicht eine derartige Unterscheidung zwischen zwei Arten möglicher Erlebnisinhalte vornehmen, so würde sie uns ja nichts über das, was wir wissen wollen, besagen.

Im Unterschied zu Herrn Reichenbach bin ich der Meinung, daß die Ausführungen von Herrn Waismann in den Grundzügen das Richtige treffen, wenn sie auch noch verschiedene Fragen offen lassen. In seiner Entgegnung auf Herrn Waismann machte nun Herr Reichenbach eine Bemerkung, an die ich meine zweite Frage anknüpfen möchte. Er sagte nämlich, daß eine Wahrscheinlichkeitsaussage über die Zukunft,wenn man die Waismannsche Interpretation annehmen würde, nichts weiter enthalten würde als einen Bericht über das in der Vergangenheit Erfahrene, also nichts mehr besagen würde, als wir schon wissen. Ich möchte hier wieder die besondere Anwendung auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff beiseite lassen und die prinzipielle Frage stellen: Darf eine wissenschaftliche Aussage mehr sagen, als wir schon wissen? Vermutlich wird hier Herr Reichenbach mit nein " antworten und hinzufügen, man müsse aber einen Unterschied machen zwischen dem, was wir unmittelbar aus der Erfahrung wissen, und dem, was wir erst mittelbar daraus erschließen. Daraufhin würde ich dann meine Frage so stellen: Können wir mit Hilfe irgendeines Schlußverfahrens aus dem, was wir wissen, auf etwas „Neues" schließen, das in dem Gewußten nicht schon enthalten ist? Ein solches Schlußverfahren wäre offenbar Zauberei. Mir scheint, das müssen wir ablehnen.

REICHENBACH: Wenn ich hier im Rahmen der Diskussion kurz die

Fragen von Herrn Carnap antworten muß; so wird es nicht möglich sein, die Untersuchung so weit zurückzuführen, wie es der Gegenstand eigentlich erfordert. Hier liegt der Grund, warum die Differenz zwischen mir und Herrn Carnap größer erscheinen muß, als sie tatsächlich ist; die Gemeinsamkeit liegt im letzten erkenntnistheoretischen Standpunkt, während in der Analyse eines so schwierigen logischen Problems, wie es die Wahrscheinlichkeit darbietet, natürlich Unterschiede bestehen, so lange die Erkenntnistheorie der Wahrscheinlichkeit noch so wenig durchdiskutiert ist wie jetzt. Aber um der vorläufigen Klärung willen will ich hier auf Herrn Carnaps Fragen kurz antworten; ist doch die Klärung der Unterschiede der einzige Weg, auf dem man zu ihrer berwindung kommen kann.

Die Fragen von Herrn Carnap sind im Rahmen der klassischen Logik gestellt; ich habe nun schon in meinem Vortrag ausgeführt, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie im Rahmen der klassischen Logik keine Aufklärung finden kann. Wer den Standpunkt anerkennt, daß jede Aussage wahr oder falsch sein mub, daß jede Aussage über mögliche Sachverhalte prinzipiell bestätigt oder widerlegt werden kann, der muß zu der Auffassung kommen, daß jede Wahrscheinlichkeitsaussage über die Zukunft, die also mehr ist als bloßer Bericht über Vergangenes, sinnlos ist. Ich sagte gleichfalls in meinem Vortrag, daß dies die eigentliche erkenntnistheoretische Schwierigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie ist. Ich sagte aber andererseits, daß wir als Erkenntnistheoretiker nicht die Aufgabe haben über Wahrscheinlichkeitsaussagen zu Gericht zu sitzen. Dies scheint mir der Fehler des Fragestellers zu sein. Ich finde, daß wir verpflichtet sind, die Erkenntnis so zu nehmen, wie sie ist, und sehen müssen, was für Operationen in der Erkenntnis vorliegen. Wenn ich Carnaps erste Frage im Sinne der klassischen Logik verstehe, muß ich mit nein antworten. Ich glaube aber, daß man Aussagen zulassen kann, die im Sinne der klassischen Logik unentscheidbar sind. Ich glaube, daß man Wahrscheinlichkeitsfragen deshalb zulassen darf, weil es eine induktive Entscheidbarkeit gibt, wie es das tatsächliche Verhalten eines jeden Menschen beweist. Die ganze Ausführung der Theorie der induktiven Entscheidbarkeit kann ich hier nicht geben. Hierdurch ist nun auch die Antwört auf die zweite Frage gegeben. Vom Standpunkt der klassischen Logik darf ich natürlich nicht auf etwas schließen, was mehr aussagt, als ich schon weiß. Aber wir kommen mit einem derartigen Verfahren weder in der Wissenschaft noch im täglichen Leben aus. Die Frage von Herrn Carnap, ob der Wissenschaftler etwas aussagen darf, was er nicht weiß, klingt so, als ob ihm von der Wahrscheinlichkeitstheorie etwas beinahe Unmoralisches zugemutet würde. Gewiß darf der Wissenschaftler nicht Beliebiges aussagen, was mit seinem Wissensbestand in keinerlei Zusammenhang steht; es liegt aber völlig anders, wenn er für das Hinausgehen über seinen Wissensbestand das Induktionsprinzip zugrunde legt. Meine Antwort auf Herrn Carnaps Frage lautet also: „Ja, aber es gibt bestimmte Prinzipien, nach denen dieses Hinausgehen über den Wissensbestand geregelt sein muß, wenn es erlaubt sein soll.“ Auch die Aussage des vereidigten Zeugen vor Gericht darf ja in diesem Sinne über den unmittelbaren Wahr- nehmungsbestand hinausgehen.

ZILSEL: In der von Herrn v. Mises entwickelten Theorie bestehen interne Schwierigkeiten und zwar die Konvergenzschwierigkeiten, auf die Herr Feigl hingewiesen hat und die Schwierigkeiten der „Unabhängigkeit”. Wann sind zwei Kollektive voneinander unabhängig? An dieser Frage, die nicht befriedigend beantwortet scheint, hängt das Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf interne Punkte will ich jedoch nicht näher eingehen.

Da Herr v. Mises soeben im Saal erscheint, möchte ich an ihn die Frage richten, ob das Kollektiv in seiner Auffassung ein empirischer Begriff oder eine Idealisierung ist. Darin scheint mir sein Standpunkt sich gegen früher verschoben zu haben.

Wichtiger ist, daß in der genannten Theorie für das allgemeine Induktionsproblem kein rechter Platz ist. Denn schon bei der Frage, ob eine empirisch gegebene endliche Folge von Ereignissen als Anfangsteil eines Kollektivs aufgefaßt werden soll, spielt die Induktion herein. Was hilft mir denn das schönste Kollektiv, wenn ich es empirisch nicht verwerten kann? Daß der Mathematiker schon gespielte Zufallsspiele zu Kollektiven idealisiert, wäre noch verständlich. Wieso aber gelangt er dazu auch Aussagen über bisher noch nie gespielte Zufallsspiele bzw. Kollektive zu machen? Beispiel: ein reguläres Pentagondodekaeder aus homogenem Material wird an seinen Flächen beziffert; sodann wird mit ihm „dodekaedert“ (nach Analogie des „Würfelns“). Offenbar erfolgen hier die Wahrscheinlichkeitsansätze—die jeder Mathematiker machen wird—auf Grund einer Analogie mit dem Würfelspiel. Auch hier benützt man also die Induktion und man darf daher auch in der Theorie nicht an ihr vorbeigehen.

Zu eng scheint es auch, wenn man die quantitative Faßbarkeit der Naturgesetze bloß durch den Satz beschreibt: jede Messungsreihe, vorgenommen an derselben physikalischen Größe, ergibt ein Kollektiv und unterliegt daher den mathematischen Sätzen über Streuung usf. Der Auffindung jedes quantitativen Gesetzes müssen nämlich qualitative Kenntnisse vorausgehen. In ihnen aber sind die Hauptschwierigkeiten schon eingeschlossen. Beispiel: Bevor man die Galileische Fallformel finden kann, muß man wissen, daß die Farbe und der Geruch des fallenden Körpers, das Mittagessen des Experimentators usf. auf den Fall keinen merkbaren Einfluß ausüben. Ohne solche aus der Alltagserfahrung gewonnene Kenntnisse kann man niemals zu messen auch nur anfangen. Die eigentlichen Probleme stecken also schon in den qualitativen Induktionen des Alltags. Der Mathematiker und Physiker spricht freilich nur über die quantitativen Meßresultate. Der Philosoph aber hat Fachgrenzen zu überschreiten und Probleme in ihrer Allgemeinheit aufzurollen. Das Wahrscheinlichkeitsproblem ist philosophisch, da es nur durch einheitliche Betrachtung sehr weiter Gebiete sich wird lösen lassen. Man kann auch außerhalb des engsten mathematischen Fachgebietes mit mathematischer Exaktheit Untersuchungen anstellen.

Die Probleme der Induktion, der Auffindbarkeit und quantitativen Formulierbarkeit von Naturgesetzen kann man unter dem allgemeinen Namen des „Anwendungsproblems" zusammenfassen. Es handelt sich nämlich um die allgemeine Frage, wie die Natur konstelliert sein muß, wenn deduktiv aufgebaute Theorien auf die Empirie sich sollen anwenden lassen. Die Physiker pflegen diese eigenartige Naturkonstellation nicht zu untersuchen, sondern vorauszusetzen; Herr v. Mises scheidet ihre Erörterung—wie mir scheint, mit weit geringerem Recht—auch aus der Wahrscheinlichkeitstheorie aus. Es ist nicht so wichtig, in welche Schachtel man das Anwendungsproblem hineintut. Aber bitte: irgendwo möge man es doch untersuchen!

v. MISES: In der Frage, ob das Kollektiv etwas Empirisches oder eine Idealisierung ist, bin ich der Meinung, daß das Kollektiv ein durchaus abstrakter, idealer Begriff ist. Ich fasse meine Definition auf wie etwa die Definition einer Kugel in der Geometrie.

Es ist hier die Frage gestellt worden; wie man darüber entscheiden kann, ob eine in der Erfahrung gegebene Folge ein Kollektiv ist. Ich glaube, daß dies eine für den Augenblick zu weit reichende Frage ist. Meiner Ansicht nach ist dies kein Problem innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie, sondern eine Frage, die außerhalb liegt und die man etwa mit dem gleichen Recht behandeln kann wie die Frage: Woher weiß ich, daß die Erde Kugelgestalt in streng theoretischem Sinne hat? Wieviel Vermessungen müßte ich vornehmen, um das zu wissen? Aus endlich vielen Vermessungen kann man es offenbar nicht exakt schließen. Eine derartige Frage kann diskutiert werden, aber ich glaube nicht, daß sie etwas mit der Wahrscheinlichkeitstheorie als solcher zu tun hat. Hier liegt vielleicht das allgemeine „Anwendungsproblem", analog etwa der Frage: Woher weiß man, daß sich die Geometrie auf die Wirklichkeit anwenden läßt, oder daß die Mechanik des starren Körpers auf wirkliche Dinge anwendbar ist? Was entscheidet eigentlich darüber, ob etwas eine starrer Körper ist? Wir ziehen gewisse Schlüsse aus der Theorie der starren Körper und, wenn sie einigermaßen mit der Beobachtung stimmen, sind wir zufrieden und sagen, der betreffende Körper könne als starrer Körper gelten. Genau so liegt es bei der Frage, ob eine bestimmte Erscheinungsreihe, z. B. ein Spielvorgang, ein Kollektiv bildet. Ich glaube nicht, daß in diesem Punkte Unterschiede zwischen der Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit und einem anderen Zweig der Naturwissenschaft bestehen.

Was das Dodekaeder anlangt, so ist gefragt worden: Wie kommt es, daß wir darüber etwas wissen? Wir wissen natürlich gar nichts. Wir setzen in die

Rechnung ein, wir hätten einen Körper mit 12 gleichen Wahrscheinlichkeiten und rechnen damit. Ob und wie wir jemals einen solchen Körper herstellen können, wissen wir nicht, wir können es nur auf Grund der Analogie mit ausgeführten Würfeln vermuten. Im übrigen sind hier zwei Auffassungen möglich. Man kann sich zunächst auf den Standpunkt stellen, es gäbe eine Wahrscheinlichkeit a priori, man könne ohne jede Erfahrung sagen, das Dodekaeder habe 12 gleiche Wahr scheinlichkeiten. Ich glaube, daß diese Auffassung hier nicht vertreten wird und daß ich sie nicht zu bekämpfen brauche. Die andere Auffassung besagt, man wisse es zwar nicht a priori, aber man wisse es auf Grund einer auf Erfahrung aufgebauten klassischen (deterministischen, Wissenschaft, der Mechanik: Aus der Mechanik der starren Körper folge, daß es nur auf die statischen und auf die Trägheitsmomente ankommt; wenn diese Momente für die 12 Würfelkanten oder die 30 Dodekaederkanten gleich sind, so ist die Symetrie und damit die Gleichwahrscheinlichkeit vorhanden. Darauf muß ich sagen: Sie könnten aus der Mechanik nur dann etwas schließen, wenn Sie den ganzen mechanischen Vorgang kennen. Bekanntlich wird mit Hilfe eines Bechers gewürfelt, der zuerst „gerüttelt" wird, und es kann so gewürfelt werden, daß auch bei einem vollkommen „richtigen", d. h. exakt symmetrischen Würfel die sechs Seiten nicht gleich oft fallen. Mit der Mechanik ist hier nichts zu holen. Dies wäre nur dann möglich, wenn so einfache mechanische Verhältnisse wie beim Würfel selbst fur den ganzen Prozeß bestehen würden. Was aber in dem Becher beim sog. Rütteln oder Mischen geschieht, weiß man nicht; es gibt geschickte Leute, die auch mit korrekten Würfeln so würfeln, daß immer die gleiche Seite herauskommt. Die Voraussetzungen für die Anwendung des unmittelbar einleuchtenden Symmetrieprinzipes bestehen für den Würfel allein und nicht für den ganzen Vorgang.—Der Schluß vom Würfel auf das Dedekaeder: Da es mit dem Würfel geht, nehmen wir an, es würde auch gehen, wenn wir ein analog hergestelltes Dodekaeder hätten, ist kein theoretischer Schluß, sondern eine Vermutung, die mit der Theorie nichts zu tun hat und ebensogut falsch wie richtig sein kann. Solche Analogieschlüsse, die außerhalb der Wissenschaft liegen, machen wir sehr oft, aber wir können sie dann aus der Theorie nicht begründen. Da ist meines Erachtens keine wirkliche Schwierigkeit vorhanden.

Was den letzten Punkt betrifft, der hier erwähnt worden ist, daß man mit der Häufigkeitstheorie nicht alle Fragen erledigen könne und im gewöhnlichen Leben sog. Wahrscheinlichkeitsschlüsse gebrauche, die außerhalb der Theorie liegen, so möchte ich dazu bemerken, daß man die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit vollkommen trennen muß von jeder Anwendung des Wortes „Wahrscheinlichkeit" auf anderes als statistische Mannigfaltigkeiten. Wenn jemand wissen will, ob seine Ehe wahrscheinlich gut ausgehen werde, kann er alle möglichen berlegungen anstellen, aber keine vernünftige berlegung, die etwas mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun hat. Denn eine solche Frage kann nicht auf eine große Folge gleichartiger Vorgänge bezogen werden. Daß das Wort Wahrscheinlichkeit in einem viel weiteren Maße im gewöhnlichen Leben angewendet wird, als wir es in der Theorie verwenden, ist eine normale Erscheinung, wie sie beispielsweise bei Ausdrücken wie „Kraft", „Arbeit" usw. ganz geläufig ist. Darin kann ich keinen Vorwurf gegen die Theorie erblicken.

REICHENBACH: Ich stimme mit Herrn v. Mises überein in der Auffassung, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen grundsätzlich in Häufigkeitsaussagen übersetzt werden müssen. Nur scheint mir, daß die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung von Herrn v. Mises, so geistvoll sie in ihrer mathematischen Durchführung aufgebaut ist, die Lösung des Problems der Häufigkeitsaussage noch nicht enthält. Denn die v. Misesschen Kollektivs sind unendliche Folgen, und es bleibt ganz offen, wie es möglich ist, diese unendlichen Folgen den zwar sehr großen, aber doch stets nur endlichen Beobachtungsfolgen der Erfahrung zuzuordnen, wie man also die v. Misessche Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Physik anwenden soll. Herr v. Mises hat die Ansicht entwickelt, daß es allein Aufgabe des Mathematikers sei, eine idealisierte Wahrscheinlichkeitsrechnung zu entwickeln; die Zuordnung dieser idealen Disziplin zur Wirklichkeit ginge den Mathematiker als solchen dabei gar nichts an. So sei etwa die Geometrie ein in sich geschlossenes mathematisches System; ob aber gewisse physikalische Körper die Eigenschaft dieses Systems in sich realisieren, das zu ermitteln sei Aufgabe des Physikers, der dazu eben die Erfahrung zu befragen hat. Hier scheint es mir nun, daß Herrn v. Mises eine wesentliche Eigentümlichkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entgangen ist, die den Vergleich mit der Geometrie unzulänglich macht.

Bei der Zuordnung physikalischer Körper zu einer mathematischen Theorie tritt der Annäherungsbegriff auf, und dieser Begriff enthält den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Denn man darf ja nicht sagen: diese physikalischen Dinge entsprechen innerhalb gewisser Grenzen den mathematischen Axiomen, sondern man muß sagen: diese physikalischen Dinge entsprechen mit großer Wahrscheinlichkeit innerhalb gewisser Grenzen den mathematischen Axiomen. Das Zuordnungsproblem enthält also selbst den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Bei der Geometrie darf man zwar das Zuordnungsproblem von der mathematischen Theorie trennen, denn das Zuordnungsproblem enthält ja keinen geometrischen Begriff; bei der Wahrscheinlichkeitstheorie dagegen geht der von dieser Theorie konstituierte Begriff selbst in das Zuordnungsproblem ein: das ist die logische Eigentümlichkeit des Wahrscheinlichkeitsproblems. Darum darf der Mathematiker nicht einfach unendliche Folgen mit gewissen Häufigkeitseigenschaften entwickeln, deren Zuordnung zur Wirklichkeit er dann den Physikern überläßt; sondern er steht vor der Aufgabe, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu entwickeln, der bei dieser Zuordnung benutzt wird. Das Zuordnungsproblem muß also in die Theorie der Wahrscheinlichkeit aufgenommen werden.

Ich habe deshalb in meinem Vortrag eine Wahrscheinlichkeitstheorie entworfen, die zwar auch, wie die Theorie von Herrn v. Mises, die Wahrscheinlichkeit durch den limes der Häufigkeit in einer unendlichen Folge deutet; aber ich habe deshalb in diese Wahrscheinlichkeitstheorie das Induktionsaxiom als wesentlichen Bestandteil aufgenommen, weil nur unter Zuhilfenahme dieses Axioms die Häufigkeitsaussagen einen für die Anwendung auf wirkliche Dinge faßbaren Sinn erhalten. Das führt freilich in eine Theorie, in welcher Wahrscheinlichkeitsaussagen nur noch mit Wahrscheinlichkeit gelten; und darum kann man diese Theorie, die die Alternative wahr–falsch aufgegeben hat, nicht mehr eine mathematische Theorie nennen. Aber darin zeigt sich eben, daß es eine ideale mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nicht gibt. Die mathematische Theorie kann nur gewisse Korrelate des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entwickeln, die zu dem Wahrscheinlichkeitsbegriff der Anwendung in einer gewissen Beziehung stehen, ohne daß sie ihn wirklich erfassen. Etwas derartiges leistet die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie, die man als System impliziter Definitionen für einen derartigen Korrelatbegriff auffassen kann, und das leistet die v. Misessche Theorie, die in einem Häufigkeitsbegriff einen derartigen Korrelatbegriff schafft Der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Physik aber ist stets ein anderer.

Man darf auch nicht einwenden, daß die Physik zwei Wahrscheinlichkeitsbegriffe enthält, einen, den sie bei Zuordnung eines mathematischen Systems zur Wirklichkeit benutzt, und einen anderen, den sie bei statistischen Gesetzen, wie etwa der Gastheorie, benutzt. Vielmehr ist dies beide Male derselbe Wahrscheinlichkeitsbegriff; das gerade muß als wichtigstes Resultat aller erkenntnistheoretischen Durchbildung der Wahrscheinlichkeitstheorie angesehen werden. Wenn der Physiker nach statistischen Gesetzen eine mittlere freie Weglänge des Gasmoleküls berechnet, so heißt diese Angabe: in einer großen Menge von Molekülen wird der Mittelweg aller Weglängen wahrscheinlich der berechneten Weglänge entsprechen. Der hier auftretende Begriff „wahrscheinlich" läßt sich in eine Häufigkeitsaussage umsetzen, indem man ihn in eine unbestimmte Prophezeiung verwandelt: wächst die Anzahl der Moleküle, so wird der Mittelwert der freien Weglänge immer besser der berechneten Zahl entsprechen. Genau so läßt sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff der Zuordnung, ob er nun als Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird oder als bloße „Vermutung", in die unbestimmte Prophezeiung einer Häufigkeit umsetzen: daß ein gemessener Stab wahrscheinlich die Länge 73,425 cm hat, bedeutet die Häufigkeitsaussage: bei Ausführung einer großen Zahl von Messungen an diesem Stab wird der Mittelwert der Messungen wahrscheinlich 73,425 cm betragen. Und auch hier läßt sich wieder der Begriff wahrscheinlich erst eliminieren, wenn man der Aussage die Form einer unbestimmten

Prophezeiung gibt: wächst die Zahl der Messungen, so wird der Mittelwert der Zahl 73,425 (evtl. innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen) zustreben.

Es gibt deshalb nur einen Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Physik. Er läßt sich nicht durch eine mathematische Disziplin erfassen, sondern nur durch eine Wahrscheinlichkeitstheorie, die das Induktionsaxiom enthält und von der Alternative wahr–falsch der strengen Logik zur Aussagenwahrscheinlichkeit und zur induktiven Entscheidbarkeit übergeht.

NEURATH: Ich möchte Herrn v. Mises die Frage stellen, ob wir zum Zwecke der Ordnung aller einschlägigen Probleme drei Fragenkomplexe folgendermaßen unterscheiden können: Erstens die rein logisch-mathematischen Fragen, die sich allein auf den Bau der Wahrscheinlichkeitsrechnung beziehen, deren Sätze doch sämtlich analytischen (tautologischen) Charakter haben. Zweitens die Fragen, die sich auf die empirische Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung richten. Hier muß zunächst gefordert werden, daß jede Wahrscheinlichkeitsaussage so beschaffen ist, daß angesichts der Erfahrung über ihre Wahrheit oder Falscheit eindeutig entschieden werden kann. Die Bezugnahme auf unendliche Versuchsreihen müßte daher ausgeschlossen werden. Es entsteht daher schon für die erste Problemgruppe die Frage, ob sich nicht der Begriff des Infiniten ausschalten ließe, indem schon das Gebäude der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung statt auf dem Begriff des Kollektivs, auf dem einer endlichen Menge von Elementen aufgebaut werden könnte.—Das dritte Problemgebiet gruppiert sich um die Frage der Induktion. Ich möchte auf diese sehr unbestimmte Frage für die jetzige Diskussion keinen Wert legen und möchte nur betonen, daß das Problem der Prophezeiung nichts mit den beiden ersten Fragenkreisen zu tun hat. Die Induktion läßt sich eben in keiner Weise theoretisch begründen; daß wir dennoch ununterbrochen von ihr Gebrauch machen, ist eine Sache des praktischen Verhaltens und des Entschlusses.

TORNIER: Ich habe den Eindruck, daß die Philosophen von der Mathematik zu viel verlangen, nämlich nicht mehr oder weniger, als daß irgendwie bewiesen werden soll, daß eine Naturwissenschaft möglich ist. Die Mathematik hat jedoch allein die Aufgabe, die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglichst zweckmäßig aufzustellen. Dabei ist übrigens die Festsetzung dessen, was regellos ist, das heißt die Formulierung des Regellosigkeitsaxioms in weiteren Grenzen willkürlich. Ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden kann, geht die Mathematik nichts an. Die Praxis zeigt eben, daß man sie anwenden kann. Ich möchte deshalb bezweifeln, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung sich dadurch von der Geometrie unterscheidet, daß es nur eine Wahrscheinlichkeitsrechnung geben kann. Ich glaube, daß mehrere Arten von Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich sind, ob sie praktisch anwendbar sind, ist eine andere Frage.

GRELLING: Ich möchte nur ein paar Bemerkungen zum Problem der Induktion machen: Es mag dahingestellt bleiben, welches die beste Formulierung des Induktionsprinzips ist. Jedenfalls steht folgendes fest:

I. Ohne Anwendung eines solchen Prinzips kommt man in der Naturwissenschaft keinen Schritt vorwärts; denn erst das Induktionsprinzip ermöglicht den Schluß von beobachteten auf nicht beobachtete Tatsachen. Ohne solchen Schluß verfehlt aber die Wissenschaft ihren wichtigsten Zweck, die Voraussicht.

2. Das Induktionsprinzip ist nicht tautologisch. Versucht man es durch

eine tautologische Aussage zu ersetzen, so ist damit kein Schluß von einer Tatsache auf eine andere möglich.

3. Das Induktionsprinzip läßt sich nicht selbst durch Induktion begründen. Das wäre ein offenbarer Zirkel.

Wäre ich noch Friesianer, so würde ich aus diesen Tatsachen den Schluß ziehen: also ist das fragliche Prinzip ein synthetisches Urteil a priori. Heute sage ich: soll diese Behauptung mehr besagen, als daß das Prinzip eine nicht tautologische und zugleich nicht-empirische Aussage ist, so bestreite ich sie; ich glaube nicht, daß wir irgend etwas, was keine Tautologie ist, a priori erkennen können. Jedenfalls aber können wir daraus, daß ein für die Wissenschaft unentbehrliches Prinzip weder logisch noch empirisch begründbar ist, nicht schließen, daß es eine Erkenntnis a priori darstellt.

Freilich ist mit diesen Feststellungen das Induktionsproblem nicht gelöst, sondern in aller Schärfe gestellt. Wir können zwar sagen, das Induktionsprinzip spricht eine berzeugung a priori aus, die wir unseren empirischen Schlüssen zugrunde legen. Aber mit welchem Recht wir das tun, diese Frage können wir heute so wenig beantworten wie Hume vor 200 Jahren.

v. MISES: Zur Frage von Herrn Neurath bezüglich der Notwendigkeit des Infiniten möchte ich folgendes sagen: Dies ist ein ernstes Problem, über das ich viel nachgedacht habe. Warum muß man mit unendlich ausgedehnten Versuchsreihen rechnen? Vielleicht wird das durch eine Analogie etwas klarer. Wir arbeiten in der Geometrie mit sog. mathematischen Linien und Flächen. Felix Klein hatte einmal die Idee, da es in Wirklichkeit gar keine Linien, sondern nur Streifen gibt, man solle auch in der Geometrie versuchen, Streifen von endlicher Dicke anzunehmen und die ganze Kurvengeometrie, die dann eine Streifengeometrie wird, auf dieser Grundlage zu entwickeln. Die Durchführung ist aber nicht weit gediehen. Man muß sich schon große Mühe geben, um nur zu finden, was in der Streifengeometrie an die Stelle des Schnittpunktes zweier Kurven tritt und es entsteht ein noch weit komplizierterer Begriff der Krümmung usw. (Das Ganze hängt zusammen mit dem Kleinschen Begriff Approximationsmathematik im Gegensatz zur Präzisionsmathematik.)

So ist es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch. Man könnte versuchen, mit endlichen Häufigkeitswerten zu arbeiten, das wäre aber sehr schwierig und unübersichtlich und man würde keinen einzigen einfachen Satz herausbekommen.. Der erste Ansatz, den eine Versicherungsgesellschaft bei ihren Rechnungen macht, setzt schon eine unendliche Masse voraus. Es verhält sich demnach so: Aus praktischen Gründen bedient man sich der infiniten Theorie, man rechnet, obwohl das Versuchsmaterial endlichen Abschnitten entnommen ist, so, als ob es unendlich wäre und in allen Operationen bedient man sich der Rechenregeln, die auf der Annahme unendlicher Kollektivs beruhen, weil sie kürzer, einfacher, übersichtlicher sind.

Herr Zilsel hat die Frage der Statistik und damit wieder das „Anwendungsproblem " aufgeworfen. Da muß ich mich inkompetent erklären. Wenn ich aufrichtig sein soll, habe ich das Gefühl, daß hinter dem Wort „Anwendungsproblem" das steckt, was man mit Recht ein Scheinproblem nennt. Die Auffassung, daß es neben den Theorien für bestimmte Sachgebiete noch eine weitere Theorie darüber gibt, wie die Sätze der ersteren Theorien auf die Wirklichkeit angewendet werden können, scheint mir ein Analogon zur Lehre vom „Ding an sich" zu sein. Ich habe mir viel Mühe gegeben, in dem „Anwendungsproblem“ etwas anderes zu finden, bin aber immer wieder zu dem Schlusse gekommen, daß hier ein typisches Scheinproblem vorliegt, und daß man jedem beliebigen Erscheinungsgebiet gegenüber nichts anderes zu tun hat, als eine Theorie aufzustellen, die so beschaffen ist wie etwa die geometrische Theorie oder die Mechanik. Man kann nach der Anwendbarkeit fragen, aber es gilt hier nicht, eine Theorie der Anwendbarkeit zu entdecken. Es gibt nicht diese Zweiteilung, erstens eine Theorie der Bewegung der starren Körper und zweitens eine Theorie, wie die Theorie der starren Körper auf die wirklichen Körper anzuwenden sei. hnliches wäre zu dem zu sagen; was Herr Grelling ausgeführt hat.

Wenn hier gesagt worden ist, daß es nur eine Wahrscheinlichkeitsrechnung geben könne, während es verschiedene Geometrien gibt, so stimme ich Herrn Tornier zu, der dies bestreitet. Man kann z. B. das Regellosigkeitsaxiom abändern; man kann ein etwas anderes Axiom dafür setzen und es entsteht dann eine andere Wahrscheinlichkeitsrechnung in demselben Sinne, wie es eine euklidische und eine nichteuklidische Geometrie gibt.

Zu den Ausführungen von Herrn Reichenbach betreffend die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für jedes Anwendungsproblem (z. B. das der Geometrie), möchte ich eine Bemerkung aus meinem Vortrag zitieren, nämlich die, daß Annäherung und Statistik nicht zu verwechseln sind und zunächst nichts miteinander zu tun haben. Man darf also das „Abschätzen “ in der Geometrie oder einer anderen Naturwissenschaft nicht auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückführen. Daß man nur annähernd feststellen. kann, ob eine Fläche eine Ebene ist, hat zunächst gar nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun. Das ist ein sehr tief eingewurzelter Mißbrauch der Umgangssprache, der dann in die mathematischen Lehrbücher übergegangen ist, wo oft plötzlich ein Erwartungswert eines Kollektivs als Annäherungswert bezeichnet wird. Daß man also von einer physischen Fläche nicht genau entscheiden kann, ob sie eine Ebene ist, ist ein Tatbestand von derselben Art, wie der, daß man nicht genau sagen kann, ob der Häufigkeitswert, den man in einer langen, aber begrenzten Versuchsserie festgestellt hat, schon für die Rechnung als Grenzwert brauchbar ist. Ich halte es nicht für richtig, daß man der Wahrscheinlichkeitsrechnung etwas aufbürdet, was in der Bezeichnungsweise von Herrn Zilsel „Anwendungsproblem" heißt, daß sozusagen die Wahrscheinlichkeitsrechnung dafür aufkommen muß, daß man in der Geometrie nicht genau weiß, wie man die geometrische Theorie mit den wirklich vorhandenen Körpern in Verbindung zu bringen hat. Dazu ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht da.

Damit hängt die andere Frage von Herrn Reichenbach zusammen, der eine Unterscheidung zwischen einer rein mathematischen und einer induktiven Wahrscheinlichkeit macht und für jede der beiden eine besondere Theorie statuieren will. Das ist wohl etwas übertrieben. Ich lege großen Wert auf die Beschränkung, daß in der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht alles das behandelt werden kann, was im gewöhnlichen Sprachgebrauch mit dem Worte wahrscheinlich gemeint wird. Es gibt eben zwei verschiedene Methoden, Wissenschaft zu treiben. Man kann z. B. das Problem aufwerfen, was Religion ist. Das heißt dann in der gewöhnlichen Auffassung, man suche zu dem Worte Religion alle möglichen Zusammenhänge auf, alles was sich im wissenschaftlichen, soziologischen Sinne usw., oder im Sprachgebrauch mit dem Wort Religion in Verbindung bringen läßt, oder was einmal mit dem Wort Religion bezeichnet worden ist, und versucht dann, diesen ganzen großen Komplex ungefähr abzugrenzen und zu charakterisieren. Diese Methode lehne ich für meinen Fall ab; ich benütze das Wort „Wahrscheinlichkeit“, das man allerdings dann besser durch ein ungebräuchliches Wort ersetzen würde, z. B. durch Probabilität oder dergleichen, für einen mathematisch vollkommen exakt abgegrenzten Begriff. Es wäre keine Wissenschaft, sondern die Karikatur einer Wissenschaft, wenn man eine Theorie geben wollte für alles, was man im gewöhnlichen Leben mit Recht oder Unrecht „wahrscheinlich“ nennt. Wenn man darin die Aufgabe einer philosophischen Wahrscheinlichkeitstheorie sehen will, dann lehne ich dergleichen ab.

Es scheint mir ferner ein Fehler von Herrn Reichenbach zu sein, daß er die Aussage, jede physikalische Messung bilde ein Kollektiv, vernachlässigt. Jede wiederholte Beobachtung, jede Folge von Messungen, die kleine oder große Schwankungen zeigen, ist ein Kollektiv. In diesem Falle berührt sich der Kollektivbegriff mit der Vorstellung von „Annäherung“. Auch der Physiker verwendet übrigens das Wort „wahrscheinlich“ nach Art des üblicher. Sprachgebrauchs nicht nur im Sinne einer exakten Häufigkeitsaussage, sondern in viel weiterem Sinne. Damit können wir aber in der Theorie nichts anfangen.

REICHENBACH: Ich bin auch nicht der Ansicht, daß alles, was jemals als „Wahrscheinlichkeit“ bezeichnet wurde, in die Wahrscheinlichkeitstheorie einbezogen werden soll. Es gibt aber einen vernünftigen Sprachgebrauch des Wortes „wahrscheinlich”, und gerade im Annäherungsproblem liegt ein solcher vor Ich sehe keinen grundsätzlichen Unterschied zwischen der Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bis zu einem gewissen Grade ausgemessene Fläche eine geometrische Ebene ist,und der Frage nach der Wahrscheinlichkeit beim Würfeln. In beiden Fällen werde ich die Häufigkeitsdeutung anwenden können. Es besteht hier kein sprachlicher Mißbrauch, sondern bei genauerer Prüfung bemerkt man, daß hier wirklich ein Wahrscheinlichkeitsbegriff vorliegt. Wenn Herr v. Mises sagt, eine Fehlermessung sei ein Kollektiv, so heißt das genau genommen, sie sei annähernd oder wahrscheinlich ein Kollektiv. Es liegt hier immer der induktive Wahrscheinlichkeitsbegriff zugrunde, denn eine endliche Anzahl von Messungen ist doch kein Kollektiv.

v.MISES: Nach meiner Auffassung ist aber Ihr Satz: diese endliche Menge von Meßresultaten gehört wahrscheinlich zu einem Kollektiv, nicht in eine Häufigkeitsaussage übersetzbar.

REICHENBACH: Ich behaupte, sie läßt sich übersetzen. Sie lautet dann nämlich: in einer größeren Anzahl solcher Reihen wird die Mehrheit einem Limes der Häufigkeit zustreben. Das ist eine Aussage von genau demselben Charakter, nämlich dem einer unbestimmten Prophezeihung, wie die Aussage bei der einzelnen Reihe. Diesen Wahrscheinlichkeitsbegriff nenne ich den induktiven. Ohne ihn kann die Physik nicht auskommen. Wir können von keiner Messung aussagen, sie habe eindeutig zu einem bestimmten Resultat geführt, sondern wir können nur sagen, sie habe dies Resultat mit Wahrscheinlichkeit festgestellt. Und diese Aussage läßt sich in eine statistische übersetzen.

CARNAP: Mir scheint, daß ich von Herrn Grelling und Herrn Reichenbach in einem bestimmten Punkte mißverstanden worden bin; ich möchte das kurz klarstellen. Ausführlich kann ich auf das zugrunde liegende Problem nicht eingehen, da das eine Auseinandersetzung über das Wesen der

Logik erfordern würde. Herr Grelling hat gemeint, wir in Wien wollten das Problem der Induktion beiseite schieben. Meine Bemerkung sollte sich jedoch nur gegen eine bestimmte Interpretation der Induktionsaussagen richten, und nicht etwa gegen das Problem selbst, wie diese Aussagen zu interpretieren seien. Im Gegenteil, ich halte dieses Problem für außerordentlich wichtig; und wir beschäftigen uns in Wien eifrig damit. Die Gründe für meine Ablehnung der Reichenbachschen Interpretation will ich nicht noch einmal wiederholen. Ich möchte jetzt nur auf folgendes hinweisen. Es ist nicht so, als stützten wir uns auf die klassische (oder irgendeine andere) Logik im Sinne eines bestimmten Lehrgebäudes, eines Systems von Ansichten, und kämen dann auf Grund dieser Ansichten zu dem Verbot, dies und jenes auszusagen. In einem eigentlichen Lehrgebäude, z. B. in Physik oder Geographie, können sinnvoll Meinungsverschiedenheiten auftreten. Einer sagt: „Wien liegt an der Donau", der andere sagt: „Wien liegt am Rhein"; dann ist eine Auseinandersetzung zwischen beiden über den Widerspruch möglich, die unter geeigneten Umständen zur Klärung und Einigung führen kann. Die Logik dagegen ist kein Lehrgebäude in diesem Sinne. Hier können nicht durch Materialunterschiede Meinungsverschiedenheiten entstehen, sondern nur sozusagen aus psychologischen Gründen, nämlich wenn mindestens einer von beiden inkonsequent denkt. Die Logik macht keine inhaltlichen Angaben; sie besteht nur in einer Selbstbesinnung, in einem Achtgeben darauf, daß man mit sich selbst einig bleibt, d. h. daß man nicht nachher widerruft, was man vorher gesagt hat. Wenn ich also Herrn Reichenbachs Interpretation der Induktion vom logischen Gesichtspunkt aus ablehne, so bedeutet das nicht, daß ich dabei von einer inhaltlichen Meinung ausgehe; sondern ich meine Herrn Reichenbach zeigen zu können, daß er mit sich selbst nicht einig ist, daß er auf der einen Seite etwas tut, was nicht zu dem stimmt, was er auf der andern Seite tut.

Noch ein Wort über die Prinzipien, nach denen wir etwas für sinnvoll oder sinnlos erklären, z. B. das Prinzip der Verifizierbarkeit. Auch hier scheint es mir nicht so zu liegen, als ob ich die Ansicht von Herrn Reichenbach und Herrn Grelling von einer Basis aus bekämpfte, auf der Sie selbst nicht stehen. Ich glaube, ich könnte, wenn wir genügend Zeit zur Verfügung hätten, Ihre Interpretation der Induktionsaussagen auf Grund genau der Prinzipien als sinnlos erweisen, die Sie selbst (vielleicht ohne sie explizit zu formulieren) anwenden, wenn Sie die Metaphysik als sinnlos hinstellen.

REICHENBACH: Ich greife in Herrn Carnaps letzten Bemerkungen gern den Gedanken auf, daß es sich hier um Meinungsverschiedenheiten zwischen uns handelt, die bei ausführlicher Diskussion vermutlich zum Verschwinden zu bringen wären; nur glaube ich allerdings, daß dabei der Entscheid zugunsten meiner Wahrscheinlichkeitstheorie fallen wird, denn diese Theorie ist gerade aus dem Gedanken erwachsen, den Widerspruch zwischen dem im praktischen Verhalten zum Ausdruck kommenden Glauben eines jeden Menschen an die Wahrscheinlichkeitsgesetze und der zu engen Forderung einer strengen Logik aufzulösen. Aber wir wollen die Diskussion nicht dadurch führen, daß wir uns gegenseitig die Sicherheit unserer persönlichen berzeugung vorweisen, sondern allein durch begriffliche Zergliederung und logische Argumente; und ich darf wohl Herrn Carnaps Bemerkung dahin interpretieren, daß die wichtigste Voraussetzung einer solchen Diskussion, nämlich der Wille zur gemeinsamen Einsicht, bei ihm und seinem Wiener Kreis ebenso vorhanden ist wie bei uns Berlinern.

Zur Ergänzung der hier erörterten Probleme führte Herr Hostinsk einiges aus:

HOSTINSKÝ: I.. Wir setzen voraus, daß man eine Reihe von Versuchen unter gegebenen Bedingungen macht und daß das Resultat eines Versuches einen, wenn auch sehr kleinen, Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit welcher ein gewisses Resultat des folgenden Versuches zu erwarten ist. Aus dieser Voraussetzung kann man Folgerungen ziehen (namentlich über die Dispersion), welche sehr verschieden sind von denen, die sich für den Fall unabhängiger Versuche ergeben. Abgesehen von einigen Arbeiten aus den letzten Jahrzehnten (Poincaré, Markoff, Smoluchowski) hat man die Probleme über abhängige Wahrscheinlichkeiten noch nicht behandelt, obgleich sie für die Anwendungen auf die kinetische Theorie sehr wichtig sind. Die allgemeinere Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unter der Voraussetzung abhängiger Versuche wird gewiß eine vollständigere Lösung der Probleme der kinetischen Theorie liefern als die alten Methoden. Manche Versuche, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund gewisser Axiome aufzubauen, passen nicht auf diese neuen Problemstellungen.

2. Was die Erklärung der Irreversibilität auf Grundlage der kinetischen Theorie betrifft, glaube ich, daß die beste Lösung in einer Arbeit von E. Borel (Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure 1906, abgedruckt in dem Buche Introduction géometrique a quelques théories physiques, Paris 1914) enthalten ist. So z. B. um den spontanen Wärmeausgleich in einem Gase zu begreifen, stellt man sich nach der klassischen Theorie die Gasmoleküle als vollkommen elastische Kugeln vor. Wenn wir gewisse noch so kleine Abweichungen von den Gesetzen des elastischen Stoßes oder sehr klei-

ne äußere Einflüsse (z. B. nderung des Gravitationsfeldes durch Bewegung eines Gewichtes in der Nähe des Gases) zulassen, so ist klar, daß die Berechnung der Bahnen, welche die Moleküle nach den klassischen Stoßgesetzen beschreiben sollen, nicht als Grundlage der Theorie dienen kann. Denn jene kleinen Abweichungen könnten zwar unberücksichtigt bleiben, während eines oder zweier Zusammenstöße, da aber die Anzahl der Zusammenstöße pro Sekunde sehr groß ist, häufen sich die Einflüsse der kleinen Störungen und die wirkliche Entwicklung des Gases ist ganz verschieden von der die nach der klassischen Theorie berechnet wird. Um die Entwicklung des Gases rückläufig zu machen genügt es nicht, die Geschwindigkeiten aller Moleküle in einem Augenblick umzukehren (die Anhänger der klassischen kinetischen Theorie glaubten, daß es genügt), sondern es müßten auch die Einflüsse aller jener kleinen Störungen gen rückgängig gemacht werden, was unmöglich ist. Darin liegt nach Borel die Erklärung der Irreversibilität (vgl. auch die schöne Darstellung bei Castelnuovo, Calcolo delle protabilità).

3. Es wird in den letzten Jahren zu viel über Indeterminismus gesprochen. Nach meiner Ansicht gibt es Determinismus, wenn in einem gegebenen Falle eine Abhängigkeit zwischen Ursache und Wirkung feststellt. Falls es nicht gelingt, eine solche Abhängigkeit festzustellen, ist es vorteilhafter, gar nichts zu sagen, als über Indeterminismus zu sprechen.