Mathematik — Naturwissenschaften —Medizin

Felix Kaufmann [Priv. Doz. f. Rechtsphilos. an d. Univ. Wien], Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik. Leipzig u. Wien, Franz Deuticke, 1930. X u. 203 S. 80. M. 12, — ; geb. M. 14, 40.

An drei verschiedenen Stellen der Mathematik spielt der Unendlichkeitsbegriff eine wesentliche Rolle. Zunächst das Unendlichkleine in der Infinistesimalrechnung. Hier ist es schon der klassischen Analysis vor 100 Jahren gelungen, den Unendlichkeitsbegriff auszuschalten, die Begriffe des Grenzwertes und des Differentialquotienten zu definieren, ohne unendlichkleine Größen vorauszusetzen. Die zweite Stelle liegt im Begriff der Irrationalzahl; eine soche ist durch eine unendliche Folge von Zahlen, z. B. Durch einen unendlichen Dezimalbruch bestimmt. Die dritte Stelle liegt in der Cantorschen Mengenlehre, in den aktual unendlichen sog. Transfiniten Mächtigkeiten (Kardinalzahlen) und Ordinalzahlen. Es sind Bemühungen im Gange, den Unendlichkeitsbegriff auch im zweiten und dritten Falle auszuschalten. Sie gehen von der Überzeugung aus, daß alle Unendlichkeitsbegriffe nur sinnvoll sein können als sprachliche Abkürzungen für Verhältnisse im Endlichen und daher eliminierbar sein müssen (»Finitismus«). In die Reihe dieser Bestrebungen, die besonders von den »Intuitionisten« Brouwer und Weyl gefördert worden sind, tritt das Buch von Kaufmann mit sehr bemerkenswerten Erörterungen.

Der Inhalt des Buches. Die Hauptthese lautet: Das Transfinite (aktual Unendliche) in der Mengenlehre beruht auf einem »überschwenglichen Gebrauch« (Kant) der mathematischen Symbolik, d. h. Auf einem Gebrauch der Symbole über ihren Sinnbereich hinaus. Die Unendlichkeitsbegriffe der heutigen Mathematik können teils (wie beim Unendlichkleinen) elimiert werden; teils aber ist eine finite Übersetzung nicht möglich, es leigen Scheinbegriffe vor; letzteres ist der Fall beim unabzählbar Unendlichen (d. h. Bei Mächtigkeiten, die höher sind als die der natürlichen Zahlen).

Die falsche Auffassung des Unendlichen beruht auf einer Verwechslung zwischen »individueller Allgemeinheit« (empirische Allaussage auf Grund einer Aufzählung einzelner Gegenstände) und »spezifischer Allgemeinheit« (begriffliche Allaussage, reine Soseinsurteile).

Brouwers Grundauffassung wird anerkannt (aber unter Ablehnung der Einmischung des Zeitbegriffs): eine »unendliche Menge« ist nichts anderes als ein Gesetz. Alle mathematischen Gebilde sind konstruierbar aus den natürlichen Zahlen. Reine Existenzbeweise sind sinnlos, soweit sie ins unabzählbar Unendliche führen; in vielen Fällen aber enthalten sie versteckt eine Konstruktion und sind dann sinnvoll.

Die natürlichen Zahlen. »Definition«. Als natürliche Zahlen bezeichnen wir die Elemente der durch die folgenden Festsetzungen und ausschließlich durch diese bestimmten Struktur:

1. Es gibt ein und nur ein Element, mit dessen Vorliegen das Nichtvorliegen keines anderen Elementes unverträglich ist.

1. Es gibt zu jedem Element Z_m ein und nur ein Element Z_n, mit dessen Vorliegen das Nichtvorliegen von Z_m unverträglich ist, wobei das Vorliegen von Z_n außerdem nur mit dem Nichtvorliegen eines solchen von Z_m und Z_n verschiedenen Elementes unverträglich ist, mit dessen Nichtvorliegen auch das Vorliegen von Z_m unverträglich ist.

3.Die durch 2. bestimmte Beziehung zwischen Z_m und Z_n ist unverträglich mit der gleichen Beziehung zwischen einem andern Element und Z_n.« (S. 84.) Das bedeutet: es gibt 1. genau ein Anfangsglied, 2. zu jedem Glied genau ein unmittelbar folgendes, 3. zu jedem Glied höchstens ein unmittelbar vorhergehendes. Der Zahlbegriff ist hier abstrahiert aus dem Zählprozeß, unter Ausschaltung des Zeitbegriffs. Daher ist die Ordinalzahl das Ursprügliche.

Negative Zahlen und Brüche (Rationalzahlen) werden in bekannter Weise auf natürliche Zahlen zurückgeführt.

»Eine ‚Irrationalzahl' ist nur der abgekürzte Ausdruck dafür, daß zu beschränkten Folgen [von Rationalzahlen] ohne [rationalen] Grenzwert beliebig kleine Häufungsintervalle gehören« (S. 127). Alle Sätze über reelle Zahlen in der klassischen Analysis lassen sich übersetzen in Sätze über Rationalzahlen. Diese Übersetzung wird gegeben für den grundlegenden Weierstraßschen Satz: »Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen hat einen Grenzwert«; der Beweis wird geführt, ohne andere als Rationalzahlen zu benutzen. So wird an dieser Stelle das unabzählbar Unendliche, nämlich das »Kontinuum«, die »Menge der reellen Zahlen«, ausgeschaltet, ohne den Besitzstand der mathematischen Erkenntnis zu verringern.

Der Begriff der Menge. Eine Menge ist entweder gegeben durch eine Aufzählung von Gegenständen oder durch ein Gesetz. Die Nichtunterscheidung dieser beiden Fälle, entsprchend der Nichtunterscheidung von individueller und spezifischer Allgemeinheit, ruft eine gefährliche Doppeldeutigkeit hervor. Eine Aussage über eine »unendliche Menge« spricht in Wirklichkeit nur von deren Bildungsgesetz. Ein Mengebegriff ohne Bildungsgesetz ist unzulässig, z. B. Der Begriff der »Potenzmenge« (Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge). Damit fällt einer der wichtigsten Begriffe zur Erreichung unabzählbar unendlicher Mächtigkeiten fort. Dies steht im Einklang mit dem bekannten Satz von Löwenheim und Skolem, daß alle Systeme von Zählaussagen sich im Abzählbaren erfüllen lassen Mit der Ablehnung der höheren Mächtigkeiten verschwindet auch das sog. Kontinuumproblem.

Dagegen läßt sich den transfiniten Ordinalzahlen mit Hilfe von »Unbestimmtheiten« ein finiter Sinn geben. Z. B. Wird als Modell für $\omega + 3$ nicht, wie üblich, angegeben: die Reihe aller geraden Zahlen 2, 4, 6, ... und anschließend die drei Zahlen 1, 3, 5, sondern: eine geschlossene Reihe gerader Zahlen 2, 4, 6, ... in unbekannter Ansahl, und anschließend die drei Zahlen 1, 3, 5. Ferner können mehrere solcher Unbestimmtheiten hintereinandergeschaltet werden; für die höheren Ordinalzahlen muß noch eine Ineinanderschachtelung von Unbestimmtheiten hinzutreten.

Auch die Versuche, die Mengenlehre im unabzählbar Unendlichen durch axiomatischen Aufbau zu retten, werden erörtert (Fraenkels Axiomensystem) und abgelehnt. Von der Mengenlehre bleiben jedoch als rechtmäßig bestehen: das Diagonalverfahren und die Wohlordnungstheorie innerhalb des Abzählbaren. Diese Grundlage genügt auch für die mengentheoretische Topologie, wie auch für die klassische Analysis.

Die Ensicht in die logische Unhaltbarkeit des unabzählbar Unendlichen »liegt in der Luft«. Es wird auf Brouwer, Weyl, Wittgenstein, Russel und Hilbert hingewiesen. [Der Hinweis auf Russells Stellungnahme in der Neuauflage der »Principia Mathematica« dürfte aber auf einem Mißverständnis beruhen.]

Problem der Entscheidbarkeit. Die Arithmetik ist nicht gabelbar, daher kann keine objektive Unbestimmtheit bestehen. Es ist ausgeschlossen, daß jemals die Unlösbarkeit eines arithmetischen Problems bewiesen wird. »Unterscheidet man (aber) in korrekter Weise zwischen spezifischer Allgemeinheit und individueller Allgemeinheit, so fällt der Ungedanke des Durchlaufens von unendlich vielen Möglichkeiten und damit das Hauptmotiv für die irrige Annahme der Unentscheibarkeit arithmetischer Probleme fort« (S. 187). Es besteht sogar die Hoffnung, daß das »Entscheidungsproblem« gelöst werden wird, d. h. daß ein Verfahren gefunden wird, um die Allgemeingültigkeit eines beliebigen logisch-mathematischen Ausdrucks festzustellen. Die Hauptschwierigkeit lag bisher im »erweiterten Funktionenkalkül«, d. h. in der Theorie der variabeln Satzfunktionen. Dieser Kalkül wird aber hier ausgeschaltet; ein Beispiel dafür ist die Elimination der Irrationalzahlen.

Die Antinomien werden (nach Ramsey) in zwei Arten eingeteilt: logische und epistemologische. Die Erörterung führt zu dem Ergebnis, daß sie auf Denkfehlern beruhen und durch deren Vermeidung verschwinden.

Kritik des Buches. Die hier erörterten Probleme berühren zweifellos die Kernpunkte der gegenwärtigen Grundlagenkrisis der Mathematik. Der Hauptgedanke des Buches liegt wohl in der Forderung der Konstruktivität für jeden mathematischen Begriff; es ist eine Folge dieser Forderung, daß das Unendliche nicht als aktual Unendliches, sondern nur in der Form einer gestzlich bestimmten Folge auftreten kann. Der Verf. kann mit Recht derauf hinweisen, daß die verschiedenen, einander bekämpfenden Richtungen sich in diesen Grundgedanken gegenwärtig immer mehr zu nähern scheinen. Seine Ausführungen bringen wesentliche Fortschritte für die Diskussion dieses Grundgedankens. Vor allem dürfte der Hinweis auf die Zweideutigkeit der Allgemeinheit und die darauf beruhende Zweideutigkeit des Mengenbegriffs für die weteren Untersuchungen von Bedeutung sein.

Die bisher ungelöste Aufgabe der logischen Grundlegung der Mathematik besteht darin, eine Symbolik aufzustellen, die es einerseits gestattet, unsere bisherige mathematische Erkenntnis auszudrücken, und die andererseits alles logisch Unzulässige durch ihre Syntax (d. h. Durch die metamethematischen Operationsvorschriften des Kalküls) automatisch ausschaltet. »Automatisch« bedeutet: eine inhaltliche Besinnung auf die Bedeutung der mathematischen Begriffe soll im einzelnen Falle nicht mehr nötig sein; sie soll zu Anfang einmal für immer vorgenommen sein, nämlich beider Aufstellung der Symbolik. Das vorliegende Buch stellt sich diese Hauptaufgabe noch nicht. Man erfährt nicht, wie die Symbolik der natürlichen Zahlen und später die der reellen Zahlen aufgebaut werden soll. Es wird nicht eine allgemeine Zurückführung der reellen Zahlen angegeben, sondern nur die Übersetzung bestimmter, allerdings besonders wichtiger Sätze. An Stelle der formalen Ausschaltung der Antinomien, die von Russell schon geleistet ist, wird hier eine Ausschaltung durch inhaltliche Überlegung gegeben, also in methodologisch primitiverer Form. Wird die genannte Aufgabe von K. auch nicht gelöst, so werden doch Ergebnisse geliefert, die für die Bearbeitung der Aufgabe sehr wertvoll sind. Was zu tun übrigbleibt, ist das, was Russell in den »Principia Mathematica« gegenüber seinen »Principles of Mathematics« (1903) geleistet hat; was Heyting für Brouwer geleistet hat, was Hilbert für seine eigene Auffassung zu leisten sich anschickt: die Durchführung des formalen Aufbaues des logisch-mathmatischen Systems.

Wien. Rudolf Carnap