Carnap Project: Benson No. 1925-1

Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit. (1925)

Rudolf Carnap

Die uns umgebende „Außenwelt“ weist eine zweifache Ordnung auf: die des Nacheinander und die des Nebeneinander. Die Frage, warum sich jeder Gegenstand der (äußeren) Erfahrung diesen Ordnungen füge, pflegen wir seit Kant dahin zu beantworten, daß sie Formen der Anschauung seien und damit Bedingungen, denen jeder Gegenstand entsprechen müsse, um überhaupt Gegenstand einer möglichen Erfahrung zu werden.

Zeitordnung und Raumordnung sind nur durch diese notwendige Geltung für jeden Erfahrungsgegenstand miteinander verknüpft; aber keine ist von der anderen abhängig. Ein Ereignis geschehe vor einem anderen oder nach ihm oder gleichzeitig mit ihm: damit ist nichts festgelegt darüber, wie es sich räumlich zu ihm verhält, ob es über oder unter ihm stattfindet, ob es nahe oder entfernt von ihm ist oder am gleichen Ort. Eine gewisse Verwandtschaft freilich, die aber keinerlei Abhängigkeit bedeutet, zeigt sich bei begrifflicher, messender, mathematischer Erfassung der beiden Ordnungsformen. Da erscheint die zeitliche Ordnung als eindimensional, als darstellbar durch eine Reihe. Die räumliche besitzt einen höheren Grad von Mannigfaltigkeit, der als Dreidimensionalität bezeichnet wird. Das bedeutet, daß die räumliche Ordnung durch ein dreifaches Reihenschema dargestellt werden kann, jedoch ohne daß sie von sich aus drei festliegende Reihenrichtungen erkennen ließe. Die Übereinstimmung der beiden Ordnungen besteht also darin, daß sie durch Reihen erfaßbar sind, mathematisch ausgedrückt: durch Zahlen, durch Koordinaten. Die Erfassung der Außenwelt durch Messung, ihre Einordnung in ein Koordinatensystem gehört zur Aufgabe der Physik. Sprechen wir hier von Zeit und Raum der Außenwelt, so wollen wir dabei immer nur an ihre begrifflich faßbaren, rationalisierbaren, mathematischen Eigenschaften denken, also einfach: an Raum und Zeit der Physik.

Die Physik faßt die eine Zeitkoordinate und die drei Raumkoordinaten zu einem vierachsigen Koordinatensystem zusammen. Dabei ist keine der vier Koordinaten von den drei übrigen abhängig, also auch insbesondere nicht der Zeitwert vom Ort oder umgekehrt. Die Gesamtheit des Geschehens der Außenwelt, an allen Orten, zu allen Zeiten, wird von der Physik dargestellt in einer einzigen, unveränderlichen, vierdimensionalen Welt. Der Weltzustand eines Augenblicks stellt sich dann dar als dreidimensionaler Querschnitt durch diese vierdimensionale Welt. Verfolgt man in dieser Welt das Schicksal eines physikalischen Elementarteilchens (das je nach der zugrundegelegten physikalischen Theorie etwa ein Materieteilchen oder ein Elementarquantum elektrischer Ladung oder ein Elementarquantum der Energie sein mag) durch alle an ihm stattfindenden Punktereignisse hindurch, indem man sich in den verschiedenen Augenblicksquerschnitten den jeweiligen Ort des Teilchens bezeichnet denkt, so bilden diese „Weltpunkte“, von denen jeder ein Punktereignis des Teilchens darstellt, zusammen die „Weltlinie“ des Teilchens in der vierdimensionalen Welt; nur solche Weltlinien physikalischer Teilchen bezeichnen wir hier als „Weltlinien“. Diese Minkowskische Darstellung aller Bewegungsvorgänge durch das Geflecht der Weltlinien in der vierdimensionalen

Welt ist besonders durch die Relativitätstheorie verbreitet worden und darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

Die spezielle Relativitätstheorie brachte Zeit und Raum in einen engeren Zusammenhang miteinander, als sie vorher in der Physik oder im vorwissenschaftlichen Bewußtsein hatten. Der Sinn dieser Theorie kann kurz und anschaulich (nach Minkowski) so formuliert werden, daß die ebenen Augenblicksquerschnitte in ihrer Lage nicht eindeutig sind, sondern eine gewisse (nicht jede) Neigung gegeneinander haben können, ohne doch die grundlegende Eigenschaft von Augenblicksquerschnitten einzubüßen: lauter gleichzeitige Punktereignisse zu verbinden. So wird die Gleichzeitigkeit vieldeutig; Raum-oder Zeitangaben für sich haben keinen Sinn mehr, sondern nur noch die Vereinigung beider. Die allgemeine Relativitätstheorie geht noch weiter: bei ihr sind die Querschnitte i. A. nicht mehr eben, sondern bewahren die Ebenheit und die übrigen in der speziellen Relativitätstheorie ihnen zugelegten Eigenschaften nur im Grenzfall unendlich kleiner Gebiete. Auch hier aber, trotz der engen Verknüpftheit der Koordinaten miteinander, ist von einer gegenseitigen Abhängigkeit nicht die Rede; es handelt sich um vier unabhängige Variable.

Um zu der beabsichtigten These von der Abhängigkeit zwischen Zeit und Raum zu gelangen, müssen wir zuvor noch einige weitere Begriffe einführen und erörtern.

Da die Lage der Augenblicksquerschnitte und damit die Gleichzeitigkeitsbeziehung nicht eindeutig ist, sondern ein konventionelles Moment enthält, so kann in dieser physikalischen Raum-Zeit-Welt nicht von vornherein von „der" Zeitordnung gesprochen werden. Als festliegend anzunehmen ist zunächst nur die zeitliche Ordnung auf jeder einzelnen Weltlinie für sich, die „Eigenzeit“ der betreffenden Weltlinie, also nichts anderes als die Reihenfolge der Weltpunkte auf dieser Linie. Erst mittelbar können auf Grund gewisser Regeln des Vergleichs der verschiedenen Eigenzeiten zeitliche Beziehungen zwischen Weltpunkten verschiedener Weltlinien, also zwischen substantiell nicht zusammenhängenden Ereignissen abgeleitet werden, „Zeitsysteme“ aufgestellt werden. Die Vergleichsregeln können z. B. in der Form gegeben werden, daß festgesetzt wird, wann zwei Weltpunkte als gleichzeitig gelten sollen.

Die Klasse der zu einem gemeinsamen Augenblicksquerschnitt gehörenden Weltpunkte bezeichnen wir als eine „Raumklasse”. Alle Weltpunkte einer Raumklasse sind danach untereinander gleichzeitig; zu irgendeiner Raumklasse gehört von jeder Weltlinie ein und nur ein Weltpunkt. Unter einem „Raum“ (im physikalischen Sinne) ist die Ordnung der Weltpunkte einer Raumklasse (daher diese Bezeichnung) zu verstehen, ausgedrückt durch geometrische Begriffe wie: Entfernung, nah, weit, Gerade, Kreis usw.

Wir müssen nun einen sehr wichtigen Unterschied zwischen zwei Arten von Ordnungseigenschaften erörtern, der schon in der allgemeinen Ordnungslehre von Bedeutung ist und dann hier sowohl bei den räumlichen wie bei den zeitlichen Eigenschaften in Betracht kommt, nämlich den Unterschied zwischen metrischen und topologischen Eigenschaften. Metrisch heißt eine Eigenschaft, wenn sie Maßverhältnisse betrifft, also sich letzten Endes nur durch Bezugnahme auf Maßzahlen ausdrücken läßt; in manchen Begriffen treten die Maßzahlen unausgesprochen auf, z. B. in dem der Geraden (deren Definition den Begriff der kleinsten Länge benutzt) und in dem der Kongruenz (die durch den Begriff gleich langer Strecken definiert wird, oder umgekehrt). Metrische Eigenschaften der Zeitordnung sind z.B.: das Kongruenzaxiom (liegen die Weltpunkte a, b auf einer Weltlinie, c auf derselben oder einer anderen, so gibt es auf der Weltlinie von c eine mit der Zeitstrecke $\overline{\text{ab}}$ kongruente Zeitstrecke $\overline{\text{cd}}$), das Archimedische Axiom (sind a, b, c drei beliebige Weltpunkte auf einer Weltlinie, und verlängern wir die Zeitstrecke $\overline{\text{ab}}$ nach beiden Richtungen hin um hinreichend viele, aber endlich viele, mit ihr kongruente Zeitstrecken, so gibt es eine Zeitstrecke dieser Reihe, zu der c gehört). Beispiele für metrische Eigenschaften der Raumordnung; der Raum ist euklidisch; oder: der Raum ist nichteuklidisch, aber an jeder Stelle konvergieren die Maßverhältnisse bei verschwindendem Volumen des betrachteten Raumteils gegen die euklidischen.

Die nicht-metrischen Eigenschaften der Zeit- und der Raumordnung heißen topologisch. Sie betreffen nur die Nachbarschafts- und Zusammenhangsverhältnisse. Beispiele für togologische Aussagen über die Zeitordnung: die zeitliche Ordnung der Punkte einer Weltlinie ist eine Reihenordnung, d. h. sie ist eingeschlechtig (wenn a + b, so a vor b oder b vor a), transitiv (wenn a vor b und b vor c, so a vor c) und irreflexiv (a nicht vor a), also asymmetrisch (wenn a vor b, so b nicht vor a); ferner ist sie dicht (zwischen zwei verschiedenen Punkten liegt stets noch ein anderer). Beispiele für togologische Aussagen über die Raumordnung: der Raum ist dreidimensional; der Raum ist in-sich-dicht (in jeder beliebig kleinen Umgebung jedes Punktes liegen noch andere Punkte); der Raum ist stetig zusammenhängend (d. h. jede geschlossene Kurve ist in ihm zusammenschnürbar).

Außer den zeitlichen und den räumlichen Beziehungen zwischen Weltpunkten müssen wir noch eine Beziehung betrachten, die unter den Grundbegriffen der abstrakten Physik eine besondere Rolle spielt, nämlich die Koinzidenz. Kreuzen zwei Weltlinien einander, so daß der Weltpunkt a der einen mit dem Punkt b der anderen zusammenfällt, so sagen wir:a koinzidiert mit b. Diese Beziehung gehört also weder zur zeitlichen, noch zur räumlichen Ordnung, oder gewissermaßen auch zu beiden: sie bedeutet die in beiden Ordnungen zugleich erfüllte Nullbeziehung oder Identität: koinzidierende Punkte haben sowohl räumlich wie zeitlich dieselbe Lage. Daher wird durch diese Beziehung weder etwas über die Zeitordnung, noch über die Raumordnung bestimmt. Ferner ist die Koinzidenz eine topologische Beziehung, da weder das räumliche, noch das zeitliche Zusammenfallen metrische Bestimmungen sind.

Unsere These von der Abhängigkeit zwischen Zeitordnung und Raumordnung kann nun so formuliert werden: aus den topologischen Eigenschaften der Zeitordnung und der Koinzidenz können die topologischen Eigenschaften der Raumordnung abgeleitet werden. (Die weitergehende These, daß aus denselben Bestimmungen alle Eigenschaften der Raumordnung, also auch die metrischen, abgeleitet werden können, sei hier ohne Begründung oder weitere Erörterung nur vermerkt.) Diese These soll im Folgenden dadurch begründet werden, daß ein Aufbau der Zeit-Raum-Topologie zwar nicht ausgeführt, aber in den Grundzügen umrissen wird, der die als möglich behauptete Ableitung vornimmt.

Die These bedarf aber noch einer genaueren Fassung. Läßt sich ein Satz x gemäß den logischen Schlußregeln durch Schlußfolgerungen gewinnen, die von den Sätzen a, b, c und den Grundsätzen der Logik als Prämissen ausgehen, ohne andere Sätze oder unausgesprochene Voraussetzungen oder etwa die Anschauung zuhilfe zu nehmen, so sagen wir kurz: der Satze x ist aus a, b, c ableitbar. Unter einem Axiomensystem einer Theorie wird eine Zusammenstellung solcher Sätze verstanden, aus denen die (übrigen) Sätze der Theorie ableitbar sind. Ist das Axiomensystem a′, b′, c′ der Theorie T′ ableitbar aus Sätzen der Theorie T, die das Axiomensystem a, b, c besitzt so sind a′ b′ c′ und damit auch alle Sätze von T′ aus a, b, c ableitbar. Die Theorie T′ bildet in diesem Falle nur die immanente Auseinanderlegung eines Teiles von T ohne Hinzufügung logisch neuer Elemente; wir nennen dann T′ einen „Zweig“ von T. Der Sinn der These ist nun der, daß die Raumtopologie ein bloßer Zweig der Zeittopologie ist, wenn wir in die letztere noch die Koinzidenzbeziehung einfügen, die zu keiner von beiden gehört, sondern zwischen ihnen steht.

Damit diese Behauptung einen positiven Sinn erhält, muß aber noch eine einschränkende Festsetzung in bezug auf den Inhalt der Axiome der Zeittopologie getroffen werden. Denn es wäre leicht möglich, unter die Zeitaxiome Sätze aufzunehmen, die eine Aussage über die Raumordnung in mehr oder weniger versteckter Form enthalten. So könnte z. B. der Satz „der Raum ist einfach zusammenhängend“ in die Form gebracht werden: „die Zeitordnung ist derart, daß jeder vollständige Querschnitt durch die Zeitreihen, von dem je zwei Punkte miteinander gleichzeitig sind, einfach zusammenhängend ist.“ Würden solche und ähnliche Raumaxiome als Zeitaxiome verkleidet den echten Zeitaxiomen beigesellt, so wäre es freilich möglich, die Raumtopologie aus diesen scheinbaren Zeitaxiomen abzuleiten. Diese triviale Möglichkeit muß ausgeschaltet werden. Wir wollen unter einem „echten Zeitaxiom“ im Gegensatz zu einem Raumaxiom oder einem Zeit-Raum-Axiom ein solches verstehen, das nur von der Zeitordnung und der Koinzidenzbeziehung handelt; die Bezeichnung „echter Satz der Zeitordnung“ werde entsprechend verstanden. Dann soll unsere These die Ableitbarkeit der Raumtopologie aus den echten Zeitaxiomen behaupten. So wird ein Kriterium für die Echtheit eines Zeitaxioms erforderlich. Wir werden es später aufstellen.

Der Nachweis der These wird wegen der in ihr enthaltenen Ausschließlichkeitsbehauptung offenbar hinfällig, wenn die folgenden beiden Forderungen nicht streng erfüllt sind: 1) die zugrunde gelegten Axiome müssen echte Zeitaxiome sein, 2) die Ableitung der Raumtopologie aus diesen Axiomen muß „logisch rein”, d. h. frei von unausgesprochenen Prämissen sein. Um beiden Forderungen gerecht zu werden, darf die etwas größere Umständlichkeit besonderer methodischer Hilfsmittel nicht gescheut werden.

Die größte Sicherheit für die logische Reinheit der Ableitung bietet die Anwendung der symbolischen Logik. Sie hat sich in ihren verschiedenen Systemen (Schröder, Frege, Peano,Russell u. a.) vielfach bewährt bei der Behandlung der Grundlagenfragen der Mathematik, und zwar sowohl der Arithmetik und Analysis, als auch der Geometrie, wo eine ähnliche Reinheitsforderung zu erfüllen war. Das erforderliche Kriterium für die Echtheit der Zeitaxiome gewinnen wir aus der Relationstheorie, die einen Zweig der symbolischen Logik bildet. Das von Whitehead und Russell in den „Principia Mathematica“ aufgebaute System der symbolischen Logik hat vor den anderen den Vorzug, daß in ihm die Relationstheorie so weit entwickelt ist, daß sie als fertige Methode zur Behandlung auch außerlogischer Gebiete, wie hier der Zeit- und der Raumtopologie, vorliegt. Die Zeitaxiome müssen nun in relationstheoretische Form gefaßt und in den Zeichen der symbolischen Logik ausgedrückt werden;

aus ihnen müssen dann nach den logischen Schlußregeln die Sätze über die Zeit und, wenn das möglich ist, auch die über den Raum abgeleitet werden. Hier soll nicht dieser ganze Aufbau dargestellt werden (vgl. das Lit.-Verz. am Schluß), sondern nur die Grundgedanken, von denen er ausgeht, ferner in groben Umrissen seine Hauptstufen und schließlich sein Ergebnis.

Unter einer „Relation“ verstehen wir den Umfang einer Beziehung, analog der „Klasse”, die den Umfang einer Eigenschaft bildet. Viele Aussagen über eine bestimmte Eigenschaft (die Umfangslogik nahm irrtümlich an: alle) sind darstellbar durch entsprechende Aussagen über die zugehörige Klasse. Dies ist dann der Fall, wenn es nicht auf den eigentlichen Sinn der Eigenschaft ankommt, sondern nur darauf, welche Gegenstände diese Eigenschaft besitzen und damit Elemente der zugehörigen Klasse sind und welche nicht. In genau analoger Weise kommt es bei der Behandlung einer bestimmten Beziehung häufig nicht auf ihren eigentlichen Sinn an, sondern nur darauf, für welche Paare von Gegenständen diese Beziehung gilt; diese Paare sind dann Gliederpaare der zugehörigen Relation. Noch häufiger als bei den Eigenschaften ist bei den Beziehungen diese Abstraktion vom Inhalt und Beschränkung auf umfangsmäßige Behandlung möglich, sodaß die Untersuchung anstatt auf die Beziehung selbst auf ihre Relation gerichtet werden darf. Das ist besonders bei allen Untersuchungen von Ordnungssystemen der Fall; daher die grundlegende Bedeutung der Relationstheorie für die Ordnungslehre und damit für alle formalen Disziplinen, z. B. die Mathematik. In Anlehnung an das Erläuterte wollen wir eine Relation, etwa Q, „vollständig gegeben“ nennen, wenn für jedes Gegenstandspaar x, y feststeht, ob es unter die Relation fällt (in Zeichen: xQy) oder nicht; die entsprechende Beziehung ist aber damit nicht vollständig, sondern nur umfangsmäßig (extensional) beschrieben.

Bei unserem Aufbau der Zeit- und Raum-Topologie gehen wir von zwei Grundrelationen zwischen Weltpunkten aus; die wir mit K und Z bezeichnen. Die Beziehung der Relation K ist die der Koinzidenz: aKb bedeutet also, daß der Weltpunkt a mit dem Weltpunkt b raumzeitlich zusammenfällt. Die Beziehung der zweiten Relation Z ist die Grundbeziehung der Zeittopologie, das Früherliegen auf derselben Weltlinie: cZd bedeutet, daß die Weltpunkte c und d auf einer gemeinsamen Weltlinie liegen, also Punkterreignisse desselben physikalischen Teilchens darstellen („genidentische“ Weltpunkte), und zwar c (zeitlich) vor d. Wir setzen, nun voraus, daß die beiden Beziehungen (Koinzidenz; Reihenfolge der Punkte jeder Weltlinie) ihrem Umfang nach vollständig bekannt, also die beiden Relationen K und Z „vollständig gegeben“ seien. Das bedeutet: für jedes Weltpunktepaar x, y ist bekannt, ob xKy gilt oder nicht und ob xZy gilt oder nicht. Die erkenntnistheoretischen und wissenschaftsmethodischen Fragen, die sich an diese Voraussetzung knüpfen, lassen wir hier beiseite. Wichtig ist, daß außer dem hiermit. Geforderten nichts über die physikalische Raum-Zeit-Welt als gegeben angenommen werden soll. Besonders ist also auch nicht gegeben, ob von zwei Weltpunkten a, b, die nicht koinzidieren und nicht auf einer gemeinsamen Weltlinie liegen, der Punkt a früher oder später als b oder gleichzeitig mit b sei; geschweige denn, welche räumliche Entfernung oder sonstige räumliche Lagebestimmung zwischen a und b gilt.

Der Aufbau der Zeittopologie beginnt nun mit der Aufstellung von Axiomen über K und Z, die solche formalen Eigenschaften angeben, wie die oben schon erwähnten: die Transitivität, die Irreflexivität, die Asymmetrie von Z;

ferner z. B. die Symmetrie von K, die Unvereinbarkeit von Z und K usw. Der Inhalt der Axiome muß sich natürlich innerhalb der Grenzen des prinzipiell physikalisch Erfahrbaren halten. Darauf sei jetzt nicht eingegangen. Wichtig aber für die hier verfolgten Gesichtspunkte ist eine andere Einschränkung: jedes Axiom soll eine formale Aussage über K oder über Z oder über K und Z sein. Unter einem formalen Begriff ist ein Begriff der Logik zu verstehen, genauer: ein Begriff, der entweder zu den (wenigen, aufzählbaren) Grundbegriffen der Logik gehört oder durch diese allein definiert werden kann. Eine Aussage heißt eine „formale Aussage über einen oder mehrere bestimmte Begriffe", wenn sie außer diesen Begriffen nur formale Begriffe verwendet; (danach kann eine formale Aussage etwa über K und Z zwar auch als eine Aussage über K bezeichnet werden, aber nicht als eine formale Aussage über K). Es wird nun meist nicht leicht sein, zu erkennen, ob ein Satz eine formale Aussage über einen oder einige in ihm vorkommende Begriffe ist. Nach den seit Euklid gemachten Erfahrungen in der axiomatischen Behandlung der Geometrie und auch der Arithmetik ist diese Schwierigkeit oft ganz erheblich, wenn die zu beurteilende Aussage in Textworten gegeben ist. Handelt es sich um ein außerlogisches und außermathematisches Gebiet, etwa um eine Aussage, die physikalische Begriffe enthält, so ist die Schwierigkeit auch nicht damit behoben, daß der Aussage die Form einer mathemathischen Gleichung gegeben wird, etwa einer Differentialgleichung zwischen bestimmten Zustandsgrößen und der Zeit. Denn diese Gleichung hat für sich allein noch keinen Sinn; es muß die Angabe hinzugefügt werden, daß die vorkommenden Variabeln Zeit, Raumkoordinaten, Temperatur usw. bedeuten, ferner die Angabe, worauf sich die ganze Aussage beziehen soll: etwa auf ein abgeschlossenes

System materieller Punkte, auf eine inkompressible Flüssigkeit, oder dergl. So enthält eine physikalische Aussage auch in Gleichungsform mehr Begriffe, als es auf den ersten Blick scheint. Diese Schwierigkeiten fallen fort, wenn die Zeitaxiome in den Zeichen der symbolischen Logik ausgedrückt werden, und das ist bei der relationstheoretischen Behandlung der Zeittopologie ohne weiteres möglich. Wenn in einem in Zeichen ausgedrückten Axiom außer K nur logische Zeichen vorkommen, so ist es eine formale Aussage über K. Ob dies Axiom dann auch alles enthält, was zu seinem vollständigen Sinn erforderlich ist, muß sich dann nachher bei der Deduktion der Sätze zeigen: kann ein Satz, den das System enthalten soll, durch mechanisch-rechnerische Anwendung der logischen Schlußregeln aus bestimmten der Axiome bewiesen werden, so enthalten diese Axiome alles für den Inhalt des betreffenden Satzes Erforderliche; bewährt sich das für alle Sätze der Theorie, so ist das Axiomensystem als ein selbständig sinnvolles bestätigt.

Durch die Forderung, daß alle Axiome formale Aussagen über K oder über Z oder über K und Z sein sollen, und durch die symbolisch-rechnerische Methode der Ableitung ist nun sichergestellt, daß Axiome und Sätze außer logischen Begriffen keine anderen enthalten als K und Z. Nun ist Z als die reihenbildende Relation für die Zeitreihen auf den Weltlinien (physikalisch ausgedrückt: die topologische Bestimmung der „Eigenzeit”) sicherlich keine Relation der Raumordnung, sondern eine solche der Zeitordnung, und zwar von unserem Gesichtspunkt aus die grundlegende. Da wir Zeitaxiome und Sätze der Zeitordnung dann „echt“ nennen wollten, wenn sie nur Beziehungen der Zeitordnung oder der Koinzidenz betreffen, so besteht also das gesuchte Kriterium für die „echten Zeitaxiome“ und die „echten Sätze der

Zeitordnung“ darin, daß der betreffende Satz eine formale Aussage über K oder über Z oder über K und Z sein muß.

Würden wir nun keine anderen als die bisher erörterten Hilfsmittel benutzen, so ließe sich damit zwar eine Theorie der Zeitordnung aufbauen, und diese würde auch nur aus echten Zeitsätzen bestehen; aber für unsere These wäre damit nichts gewonnen. Denn da jeder Satz nur K, Z und logische Zeichen enthielte, so könnte überhaupt kein Satz vorkommen, der etwas über den Raum aussagen würde.

Die Einführung von Definitionen macht es möglich, weitere Begriffe zu behandeln, ohne die Forderung der begrifflichen Reinheit zu verletzen. Wegen dieser Forderung dürfen aber dabei erstens nur explizite (Nominal-) Definitionen verwendet werden, also solche, die einfach ein neues Zeichen als gleichbedeutend mit einem Ausdruck erklären, der aus alten Zeichen besteht. Diese Definitionen führen somit nur eine abkürzende Ausdrucksweise ein. Freilich geht ihr methodischer Wert dann, wie wir sehen werden, weit über diesen bloß ökonomischen hinaus. Zweitens darf ein neues Zeichen nur durch einen Ausdruck definiert werden, der nichts als K, Z, die jeweils schon vorher definierten Zeichen und logische Zeichen enthält. Die bei dem Aufbau selbst anzuwendende Strenge in der Erfüllung dieser Forderungen kann natürlich bei der vorliegenden Darstellung der Grundzüge des Systems nicht zum Vorschein kommen.

Die Hauptstufen des Aufbaues sollen jetzt angegeben werden.

Eine der wichtigsten Definitionen ist die der Relation W. aWb bedeutet, daß zwischen den Weltpunkten a und b eine Zeitstreckenkette besteht. Darunter verstehen wir eine Reihe von Strecken von Weltlinien derart, daß a der Anfangspunkt der ersten und b der Endpunkt der letzten ist, und daß im übrigen der Endpunkt einer jeden Strecke mit dem Anfangspunkt der nächsten koinzidiert. Um den physikalischen Sinn einer Zeitstreckenkette und damit der Relation W anschaulich zu machen, sei daran erinnert, daß die Weltlinien nicht nur die Linien materieller, sondern auch die energetischer Elemente darstellen, also z. B. auch Lichtstrahlen. Eine leichte berlegung zeigt, daß die Zeitstreckenketten gerade diejenigen Linien bilden, auf denen physikalische Wirkung sich fortpflanzt. Die Bedeutung von aWb ist also: von a geht eine physikalische Wirkung nach b. Solche Deutungen der in dem System vorkommenden Relationen und Klassen stehen aber gewissermaßen außerhalb des Systems selbst. Denn bei der Ableitung der Sätze wird nirgends auf die Deutungen Bezug genommen. Sie geschehen nur zur Veranschaulichung des Fortganges der Ableitung und zum Verständnis der physikalischen Bedeutung der schließlich abgeleiteten Sätze.

Die Gleichzeitigkeit zwischen Weltpunkten verschiedener Weltlinien wird so definiert: a und b heißen gleichzeitig, wenn weder aWb noch bWa gilt. Auch hier hat eine Erörterung des physikalischen Begriffs der Gleichzeitigkeit zu zeigen, daß er mit dieser Definition übereinstimmt. In der neueren Physik tritt die Abhängigkeit der Gleichzeitigkeitsdefinition vom Begriff der Wirkung (oder des „Signals") deutlich hervor. Als physikalische Zeittheorie werde die in der allgemeinen Relativitätstheorie enthaltene zugrunde gelegt, denn sie ist gegenwärtig die einzige Zeittheorie, die in sich selbst widerspruchsfrei und methodisch befriedigend ist und mit dem empirischen Befund in Einklang steht; damit sind wir keineswegs gebunden, die ganze R.-T. anzunehmen, da deren strittige Punkte die Zeittheorie nicht unmittelbar berühren. Unsere Gleichzeitigkeitsdefinition deckt sich dann mit der physikalischen. Ferner ergibt sich dann aus einem Axiom, das die absolute Zeit ausschließt, daß es zu jedem Weltpunkt auf einer anderen Weltlinie nicht nur einen gleichzeitigen Weltpunkt gibt, sondern viele, nämlich die Weltpunkte einer ganzen Zeitstrecke. Freilich könnte ebensogut die Annahme der absoluten Zeit der weiteren Ableitung zugrunde gelegt werden; das System der Raum-Zeit-Topologie würde sich dann etwas anders gestalten, inbezug auf unsere These würde das aber keinen Unterschied ergeben.

Eine Klasse von Weltpunkten, die mit jeder Weltlinie einen Weltpunkt gemein hat und von der je zwei Weltpunkte miteinander gleichzeitig sind, nennen wir eine „Raumklasse". Es läßt sich zeigen, daß eine solche Klasse mit jeder Weltlinie nur einen Weltpunkt gemein hat. Daher entspricht sie einem Querschnitt durch die physikalische Raum-Zeit-Welt, der keine zeitartigen, sondern nur raumartige Linienelemente enthält, also einem der Momentanräume, die in stetiger Reihe aufeinandergeschichtet die vierdimensionale Raum-Zeit- Welt bilden.

Eine Raumklasse umfaßt nun zwar die sämtlichen Weltpunkte eines Raumes, aber für die Aufgabe, die Raumordnung abzuleiten, ist damit noch nichts getan. Die Relationen K und Z stellen in der Raumklasse keine Gliederung her: da zu der Klasse nur je ein Punkt von jeder Weltlinie gehört, so gibt es in ihr überhaupt keine Weltpunkte, für die die Relation Z gilt; K-Paare, also koinzidierende Punkte, gibt es zwar, aber mit ihnen kommen wir nicht von der Stelle. Um eine Raumtopologie aufstellen zu können, brauchen wir als Grundbegriff entweder den der räumlichen Nachbarschaft oder den der Umgebungen. Die Aufgabe besteht nun darin, einen dieser beiden Begriffe aus K und Z und den andern schon definierten Begriffen abzuleiten. Der Sinn dieser Aufgabe und die Frage ihrer Lösbarkeit sollen jetzt mit Hilfe der Veranschaulichung des Weltliniengeflechtes erörtert werden. Dabei stellen wir in üblicher Weise den Raum zwei- anstatt dreidimensional dar und bilden die Zeitdimension durch eine Raumdimension ab. In einem abgeschlossenen Raum seien Fäden gespannt, die alle in verschiedenen Neigungen und Krümmungen von unten nach oben laufen und sich vielfältig durchkreuzen. ber dieses Fadengeflecht sei nichts weiter bekannt, als daß für je zwei Punkte x, y feststeht, ob x und y zusammenliegende Punkte verschiedener Fäden sind oder nicht (das entspricht der Relation K) und ob x auf demselben Faden wie y unterhalb von y liegt oder nicht (das entspricht der Relation Z). Einer Zeitstreckenkette entspricht ein aufwärtslaufender Weg durch das Fadengeflecht, der stets auf Fäden läuft, aber bei Knotenstellen nach Belieben von einem zum anderen Faden hinübergehen kann. Einer Raumklasse entspricht ein Querschnitt durch das Fadengeflecht, der jeden Faden ein- und nur einmal schneidet und entweder horizontal verläuft oder (unter gewissen Einschränkungen) einige (auch wechselnde) Neigung gegen die horizontale haben kann. Hier lautet nun die Frage: lassen sich aus den so beschränkten Angaben über das Fadengeflecht Schlüsse über die Nachbarschafts- und Zusammenhangsverhältnisse der Punkte eines solchen Querschnitts machen? Eine Bejahung dieser Frage kann auf Grund der bloßen Anschauung zwar nicht mit Sicherheit, aber doch vermutungsweise ausgesprochen werden. Soll nämlich irgendeine Deformation des Fadengeflechtes so vorgenommen werden, daß die K- und Z-Angaben gültig bleiben, so dürfen die Fäden beliebig gedehnt und in gewissen Grenzen auch gebogen, aber nicht zerrissen werden; ferner dürfen weder die bestehenden Fadenverknüpfungen sich lösen, noch neue entstehen. (Die danach zulässigen Deformationen sind gerade die „topologischen Deformationen“ der Raum-Zeit-Welt, deren Invarianten den Gegenstand der Raum- Zeit-Topologie bilden.) Auf Grund der Anschauung wird man vermuten, daß bei einer derartigen Deformation ein zulässiger Querschnitt auch ein solcher bleibt, und daß die Lageverhältnisse der Punkte eines Querschnittes zueinander sich zwar ändern, aber doch nur so, wie etwa die Lageverhältnisse der Punkte auf einer Gummifläche bei regelmäßiger Biegung und Dehnung der Fläche, wenn keine Zerreißungen und Neuberührungen stattfinden. Die Lageveränderungen würden also, so scheint die Anschauung zu lehren, alle Nachbarschafts- und Zusammenhangsverhältnisse und daher alle togologischen Eigenschaften bestehen lassen.

So bringt uns die Veranschaulichung des Weltliniengeflechts auf die Vermutung, daß die bloßen Angaben über K und Z doch genügen, um auch die Raumtopologie festzulegen. Durch diese Vermutung veranlaßt, suchen wir nach einem Wege strenger Ableitung und finden dann schließlich dieVermutung bestätigt. Es gelingt nämlich, den Begriff der räumlichen Punktumgebungen auf folgende Weise zu definieren. Es werde eine beliebige Raumklasse und in ihr ein beliebiger Weltpunkt d betrachtet. Die Weltlinie von d verfolgen wir von d aus rückwärts, d. h. in Richtung auf zeitlich frühere Weltpunkte, und greifen dabei nacheinander etwa die Punkte c, b, a heraus, so daß gilt: aZb, bZc, cZd, ferner auch aZd und bZd. Dann bestimmen wir unter Benutzung der früher definierten Relation W die Klasse derjenigen Weltpunkte unserer Raumklasse, zu denen c in der Relation W steht; wir wollen sie hier den W-Bereich von c nennen. Ebenso bestimmen wir den W-

Bereich von b und den von a. Dann läßt sich leicht zeigen, daß d zu jedem dieser drei W-Bereiche gehört (da eine Weltlinienstrecke die einfachste W-Strecke ist), daß der W-Bereich von c eine Teilklasse des W-Bereiches von b ist, und dieser wiederum eine Teilklasse des W-Bereiches von a. Alle drei W-Bereiche sind Teilklassen unserer Raumklasse. So haben wir also innerhalb unserer Raumklasse eine Reihe von konzentrischen Umgebungen des Weltpunktes d gebildet. Wenn außer den willkürlich herausgegriffenen Punkten a, b, c noch beliebige von den dazwischen und davor liegenden Weltpunkten berücksichtigt werden, so ergeben sich beliebig viele solcher Umgebungen von d. Um die physikalische Bedeutung dieser Umgebungen zu erkennen, nehmen wir als einfachen Fall an, daß a-d die Weltlinie einer Lichtquelle in homogenem Medium sei. Dann entspricht der W-Bereich von a als Umgebung von d einem mit d gleichzeitigen Kugelraum, den die seit dem Zeitpunkt a ausgegangene Strahlung erfüllt; die W-Bereiche von b und c entsprechen kleineren konzentrischen Kugeln.

Mit diesen räumlichen Punktumgebungen ist das Problem gelöst. Aus dem Gesagten geht hervor, daß sie auf Grund der Relation W, letzten Endes also allein auf Grund von K und Z definiert werden können. Es läßt sich zeigen, daß sie die (Hausdorffschen) Umgebungsaxiome der Raumtopologie erfüllen; daher kann die Raumtopologie nach dem aus der Punktmengenlehre bekannten Verfahren aus ihnen abgeleitet werden. In unserem System erweist sich ein etwas abweichendes Verfahren als das zweckmäßigste. Nachdem die Punktumgebungen definiert sind, definieren wir die „stetigen Raumkurven“ auf Grund der Eigenschaft, daß in jeder Umgebung jedes ihrer Punkte ein Intervall der Kurve bzw. ein Doppelintervall (nach beiden Seiten hin) liegt.

Dann werden „zusammenhängende Raumteile“ definiert als solche Teilklassen einer Raumklasse, daß je zwei beliebige Punkte der Teilklasse durch eine ganz in ihr enthaltene, stetige Raumkurve verbunden werden können. Als Hilfsbegriff für die Dimensionszahl definieren wir die „Trennung”: zwei Punkte eines Raumteils heißen durch einen zweiten Raumteil im ersten Raumteil getrennt, wenn es keine sie verbindende, ganz im ersten Raumteil enthaltene, stetige Raumkurve gibt, die keinen Punkt mit dem zweiten Raumteil gemein hat. Eine Punktklasse heißt dann nulldimensional, wenn sie aus nur einem Punkt oder mehreren isolierten Punkten besteht; eine Punktklasse heißt (n + 1)-dimensional, wenn es für zwei beliebige ihrer Punkte stets eine n-dimensionale, aber keine (n−1)-dimensionale Teilklasse gibt, die sie in der Punktklasse trennt. Danach ist dann eine stetige Raumkurve eindimensional, da ja zwei ihrer Punkte durch jeden Zwischenpunkt in ihr getrennt werden, also durch eine nulldimensionale Klasse; eine Fläche ergibt sich als zweidimensional, ein Körper als dreidimensional. Dabei erfüllen alle diese Definitionen die früher aufgestellte Forderung der begrifflichen Reinheit: sie lassen sich umformen in (freilich schließlich recht komplizierte) Ausdrücke, die außer logischen Zeichen nur K und Z enthalten. Ferner sind auch alle im System auftretenden Aussagen über die definierten Begriffe formale Aussagen über K und Z, also echte Sätze der Zeittopologie im früher angegebenen Sinne.

So wird schließlich in der Raumtopologie auch der Satz vorkommen: „der Raum ist dreidimensional”. An ihm als Beispiel wollen wir uns noch einmal den Sinn unserer Behauptung vergegenwärtigen, daß jeder Satz des Systems eine „formale Aussage über K und Z“ und damit „eine echte Zeitaussage“

sei. Wenn wir uns den in Zeichen ausgedrückten Satz von der Dreidimensionalität ansehen, so werden wir freilich nicht bloß K und Z und logische Zeichen in ihm finden, sondern vielmehr K und Z überhaupt nicht, dafür aber außer den logischen Zeichen noch solche für die Begriffe der Raumklasse und der Dreidimensionalität. Aber nun können wir mit Hilfe der expliziten Definitionen den Satz schrittweise umformen, ohne seinen Inhalt zu ändern. Die Definition der Dreidimensionalität gibt an, daß das Zeichen für Dreidimensionalität gleichbedeutend ist mit einem zusammengesetzten Ausdruck, der aus früheren Zeichen besteht, nämlich aus den Zeichen für Zweidimensionalität, Eindimensionalität, Trennung, stetige Raumkurve und logischen Zeichen. Diesen zusammengesetzten Ausdruck setzen wir nun in den Satz von der Dreidimensionalität des Raumes an Stelle des Zeichens der Dreidimensionalität ein. Der zweite Schritt besteht darin, daß wir an Stelle des Zeichens der Zweidimensionalität auf Grund seiner Definition einen zusammengesetzten Ausdruck einsetzen, in dem die Zeichen für Eindimensionalität, Nulldimensionalität, Trennung, stetige Raumkurve und logische Zeichen vorkommen. Der dritte Schritt beseitigt das Zeichen für Eindimensionalität aus unserem Satz, der nächste beseitigt das Zeichen für Nulldimensionalität, der darauffolgende das Zeichen für Trennung. So werden weiterhin die Zeichen für stetige Raumkurve, Raumklasse, Gleichzeitigkeit, Relation W eliminiert (um hier nur die früher erwähnten Begriffe aufzuführen, ohne die Zwischenstufen, die die wirkliche Durchführung erfordert). Und nun enthält der Satz nur noch K, Z und logische Zeichen. Hierbei ist zu beachten, daß die Umformung durch Einsetzung der definierenden Ausdrücke keinen Inhaltsverlust mit sich bringt. Bei den meisten logischen oder mathematischen Operationen ist ja der erschlossene Satz inhaltsärmer als die Prämissen; sie sind aus ihm nicht durch Rückwärtsschließen wiederzugewinnen. Hier dagegen ist der schließlich erhaltene Satz dem ursprünglichen äquivalent, d. h. wenn jener gilt, so gilt auch dieser; die Umformung ist hier also reversibel. Der ursprüngliche Satz, im Beispiel der Satz von der Dreidimensionalität, ist also nicht inhaltsreicher als der durch die Umformung aus ihm gewonnene, er ist logisch gleichwertig mit diesem, also auch wie dieser eine formale Aussage über K und Z.

So werden die wichtigsten raumtopologischen Begriffe, aus denen alle übrigen abgeleitet werden können, aus K und Z hergeleitet. Die ganze Raumtopologie bis zur Dimensionszahl hin besteht somit aus formalen Aussagen über K und Z und ist aus den echten „Zeitaxiomen“ ableitbar. Die Raumtopologie ist ein bloßer Zweig des K-Z-Systems, d. h. der Zeittopologie mit eingefügter Koinzidenzbeziehung; das war die Behauptung unserer These.

Der Beweis der These kann allerdings durch den vorliegenden Gedankengang nicht als geführt angesehen werden. Ihn kann nur die vollständige Durchführung des hier skizzierten axiomatischen Systems der Raum-Zeit-Topologie erbringen. Diese Durchführung wird aber allgemeiner eingestellt sein als der hier durch unsere These geleitete Gedankengang, der wegen seiner besonderen Einstellung auf die Frage der Abhängigkeit zwischen Zeitordnung und Raumordnung eine selbständige Behandlung notwendig und möglich macht.

Bisher ist noch nichts dazu getan, die These einleuchtender zu machen. Durch die sehr formale Behandlung der sehr abstrakten Relationen dürften wir wohl eher stutzig gemacht, als überzeugt worden sein, so daß wir vielleicht einen ähnlichen Eindruck haben wie Schopenhauer vom „Euklidischen

Mausefallenbeweis“. Handelt es sich nun im vorliegenden Falle um eine Einsicht, die erst durch eine langwierige formalistische Untersuchung gewonnen worden ist und sich gegen eine unmittelbare Annäherung sträubt? Das ist nicht der Fall. Der Grundgedanke der These ist anschaulich gewohnen worden und anschaulich faßbar; nur zu der wissenschaftlich notwendigen begrifflichen Formulierung und Rechtfertigung ist jene umständliche, abstrakte Methode erforderlich. Hier mögen einige Andeutungen in Richtung auf eine Veranschaulichung genügen. Haben wir uns erst einmal die Vorstellung (die im Grunde auf Minkowski zurückgeht) völlig deutlich gemacht, daß die Linien physikalischer Wirkung Zeitstreckenketten sind (s. o. S. 339), dann wird es uns auch nicht mehr schwer fallen, uns anschauungsmäßig mit dem Gedanken vertraut zu machen, auf dem unsere These beruht, daß nämlich die Aussage: „die räumliche Entfernung zweier physikalischer Elementarteilchen ist klein, oder sie ist groß“ nicht anderes bedeutet als: auf die Weltlinie des einen treffen vom anderen ausgehende Wirkungslinien in einem frühen oder erst in einem späten Zeitpunkt (Weltpunkt) ein.“ Nicht: wenn zwei Körper einander räumlich nahe sind, so ist die Folge, daß sie durch zeitlich kurze Wirkungslinien verknüpft werden, sondern: räumliche Nähe bedeutet nichts anderes als zeitlich kurze Wirkungsverknüpftheit. So beruht dann die ganze Raumordnung auf der Zeitordnung der Wirkungsverbindungen.

Die Wahl der Relationen K und Z als Grundrelationen zur Ableitung des Systems der Raumzeittopologie ist in Übereinstimmung mit der Voraussetzung, die die Physik zu machen pflegt, daß nämlich die Koinzidenz zweier physikalischer Punkte und die Reihenfolge der Vorgänge an einem Punkte grundsätzlich empirisch feststellbar seien und daß die Beobachtung aller anderen Tatsachen auf diese beiden Grundtatsachen zurückführbar sei. Es läßt sich nun zeigen, daß die logische Möglichkeit besteht, das System auch auf andern Grundbegriffen aufzubauen. Insbesondere gibt es zwei andere Systemformen, die die Relation K überhaupt nicht enthalten, sondern koinzidierende Weltpunkte als identisch auffassen. Ob diese beiden Formen dadurch vom physikalischen Gesichtspunkt aus unbefriedigend erscheinen müssen oder vielleicht doch gewisse Vorzüge haben, soll hier nicht entschieden werden. Die eine der Varianten hat als einzigen Grundbegriff die Klasse der Zeitrelationen auf den einzelnen Weltlinien; Z ist hier nicht Grundbegriff, sondern ist als Vereinigungsrelation jener Relationenklasse zu definieren. Hierbei sind alle Axiome Aussagen über topologische Eigenschaften dieses Systems der Eigenzeiten. Die Eigenschaften der Raumordnung liegen in der Art der Verflechtung der Eigenzeit-Reihen untereinander durch identisches Zusammenfallen einzelner Punkte. Vom Gesichtspunkt des vorliegenden Aufsatzes würde diese Systemform den Vorzug verdienen, da sie die aufgestellte These noch schärfer erfüllt als das K-Z-System; denn hier sind die topologischen Eigenschaften der Raumordnung ableitbar aus den topologischen Eigenschaften der Zeitordnung allein. Die zweite Variante hat als einzigen Grundbegriff die Relation W. Sie unterscheidet sich noch stärker von dem K-Z-System, da nicht nur K, sondern auch Z und die Begriffe der Genidentität und der Weltlinie überhaupt nicht auftreten. Hier sind somit alle Axiome Aussagen über topologische Eigenschaften der Wirkungsbeziehung. Diese Form des Systems ist besonders geeignet, um den vorhin erörterten Gesichtspunkt deutlich werden zu lassen: Raumordnung ist Ordnung von Wirkungsverknüpfungen.

An das Verhältnis zwischen Zeitordnung, Wirkungsordnung und Raumordnung, wie es in den verschiedenen Systemformen zur Darstellung kommt, lassen sich noch weitere Gedanken anknüpfen, die hier nur angedeutet werden mögen. Vom Gesichtspunkt der Methodologie der Physik aus sei an die Frage erinnert, weshalb die Physik bestrebt ist, Fernwirkungen aus ihrer Theorie auszuschalten, und sich die Aufgabe stellt, die Naturgesetze gerade durch Differentialgleichungen auszudrücken. Vom allgemeineren erkenntnistheoretischen Gesichtspunkt aus ergeben sich Ausblicke auf die Konstitution der Erfahrungsgegenstände und auf Abhängigkeitsverhältnisse zwischen den Kategorien.

Literaturhinweise

Die Durchführung des Systems der Raum-Zeit-Topologie auf Grund der Relationen K und Z soll in einer späteren Abhandlung gegeben werden unter dem Titel „Topologie der Raum-Zeit-Welt, axiomatisch dargestellt mit den Mitteln der symbolischen Relationstheorie". Für die mit der symbolischen Logik und der Relationstheorie nicht vertrauten Leser werden dort die Grundbegriffe und wichtigsten Sätze in einem einführenden Abschnitt kurz zusammengestellt.

Zur symbolischen Logik und Relationstheorie: Das grundlegende Werk ist Whitehead and Russell, Principia Mathematica. Cambridge, I, 1910 (Neudruck 1924); II, 1912; III, 1913. -Eine Einführung in die Grundbegriffe ohne Benutzung der Symbolik: Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. München 1923. - Eine erläuternde Übersicht über die Symbolik und die wichtigsten Sätze beabsichtige ich in einem Abriß der symbolischen Logik und einem Abriß der Relationstheorie zu geben.

Zur Zeittopologie vgl.: Lewin, Die zeitliche Geneseordnung. Zeitschr. f. Physik, 13,1923, S. 62–81. – Reichenbach, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Die Wissensch., Bd. 72, Braunschw. 1924. Reichenbach baut vor Einführung der metrischen Begriffe auch eine Zeittopologie auf, der die unsere nahesteht. Er gibt für unseren Gesichtspunkt sehr wertvolle Erörterungen über die Zuordnung gewisser Systembegriffe zu den gleichbedeutenden physikalischen Begriffen (z. B. Koinzidenz, Gleichzeitigkeit u. a.).

Zur Ableitung der topologischen Begriffe in der Punktmengenlehre vgl.: Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914. (Umgebungsaxiome s. S. 213.)