Paul Bernays [1938]

Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration

Mon rapport sur la situation actuelle de la théorie hilbertienne de la démonstration s'accompagne de certaines observations de principe. Tout d'abord, il me faut remarquer que les vues exposées ci-dessous ne doivent pas être envisagées comme représentant simplement la position de l'école hilberienne quant à la situation actuelle. La nécessité d'entrer dans certaines considérations méthodologiques en liaison même avec l'éxposé de l'état actuel de la théorie de la démonstration ressort de cet état lui-même.

Comme vous le savez, la théorie de la démonstration vient de passer par une sorte de crise, et plusieurs en ont pris déjà prétexte pour déclarer que l'enterprise hilbertienne avait échouté. Cette opinion s'explique du fait que le programme pro-

Über aktuelle methodologische Fragen der Hilbertschen Beweistheorie

Mein Bericht zur aktuellen Situation der Hilbertschen Beweistheorie ist mit gewissen prinzipiellen Beobachtungen verbunden. Zuallerest muß ich betonen, daß die weiter unten dargelegten Ansichten nicht einfach als eine Darstellung der aktuellen Situation aus Sicht der Hilbertschen Schule angesehen werden dürfen. Die Notwendigkeit, in Verbindung mit einer Darlegung des aktuellen Zustandes der Beweistheorie in gewisse methodologische Betrachtungen einzutreten, geht aus diesem Zustand selbst hervor.

Wie sie wissen, hat die Beweistheorie soeben eine Art Krise durchgemacht, und mehrere haben dies bereits als einen Vorwand genommen, um das Hilbertsche Unternehmen für gescheitert zu erklären. Diese Meinung erklärt sich durch die Tatposé par Hilbert pour la théorie de la démonstration, et exposé dans ses publications de 1922–1927, a besoin, selon toute apparence, d'être révisé ; la révision portant avant tout sur les fondements méthodiques.

sache, daß das von Hilbert für die Beweistheorie vorgeschlagene und in seinen Publikationen von 1922–1927 dargelegte Programm allem Anschein nach revidiert werden muß, wobei sich die Revision vor allem auf die methodischen Fundamente erstreckt.

En termes techniques, il s'agit de ceci : Pour les raisonnements métamathématique, on a besoin de moyens plus forts que ceux auxquels Hilbert envisageait tout d'abord de se restreindre, dans le sens de la « finite Einstellung » (pensée finie). Le besoin d'un tel élargissement des méthodes se fit déjà sentir à propos du problème – qu'on croyait avoir déjà élucidé – de la non-contradiction du formalisme arithmétique intégral. A ce propos, il se révéla que le point de vue finitiste de Hilbert n'est pas équivalent, comme il avait paru tout d'abord, au point de vue intuitionniste de Brouwer. Gödel a pu montrer que, dans le domaine de la théorie des nombres entiers, tous les raisonnements classiques peuvent [144]||[145] être transformés en rai-

Technisch gesprochen, geht es um folgendes: Für die metamathematischen Schlußweisen braucht man stärkere Mittel als diejenigen, auf welche Hilbert sich anfänglich – im Sinne der „finiten Einstellung“ – zu beschränken dachte. Das Bedürfnis zu einer solchen Erweiterung der Methoden machte sich bereits anläßlich eines Problems bemerkbar, das man bereits geklärt zu haben glaubte: der Widerspruchsfreiheit des arithmetischen Vollformalismus'. In diesem Zusammenhang zeigte es sich, daß der finite Standpunkt Hilberts nicht, wie es zunächst den Anschein hatte, mit dem intuitionistischen Standpunkt Brouwers äquivalent ist. Gödel hat nämlich zeigen können, daß im Gebiet der Theorie der natürlichen Zahlen alle klassisonnements admis par l'intuitionnisme, à l'aide d'une nouvelle interprétation relativement simple. Ainsi donc, la non-contradiction de la théorie des nombres entiers résulte sans autre [condition] du point de vue intuitionniste, moyennant cette interprétation.

schen Schlußweisen || mit Hilfe einer neuen, vergleichsweise einfachen Interpretation in vom Intuitionismus anerkannte Schlußweisen überführt werden können. So ergibt sich vermittels dieser Interpretation die Widerspruchsfreiheit der Theorie der natürlichen Zahlen, auch ohne den intuitionistischen Standpunkt vorauszusetzen.

Par formalisme arithmétique (ou théorie des nombres entiers) nous entendons le système de déduction formelle qu'on obtinent, à partir du calcul logique du 1^{er} ordre (calcul des prédicats, ou aussi « engerer Funktionenkalkül ») en lui adjoignant :

a) les axioms de l'égalité ;

b) les axiomes arithmétiques

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \;\rightarrow\; a = b$$

(où a' représente le nombre venant immédiatement après a)[;]

c) le schéma de l'induction complète ;

d) les définitions récurrentes élémen-

Unter einem arithmetischen Formalismus (oder Theorie der natürlichen Zahlen) verstehen wir das formale Deduktionssystem, das man aus einem Logikkalkül erster Stufe (Prädikatenkalkül oder auch engerer Funktionenkalkül) erhält, indem man ihm hinzufügt:

a) die Gleichheitsaxiome;

b) die arithmetischen Axiome

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \;\rightarrow\; a = b$$

(wobei a' den unmittelbaren Nachfolger von a darstellt)[;]

c) das Schema der vollständigen Induktion;

d) die elementaren rekursiven Definitiotaires.

(La notion du « plus petit nombre ayant une certaine propriété », qui intervient dans les déductions arithmétiques peut être écartée des recherches sur la non-contradiction, par le procédé de l'élimination des termes tels que : celui qui...)

Ce calcul dépasse déjà les moyens absolument nécessaires pour formaliser l'arithmétique des entiers. En effect, il suffit, dans ce but, comme Skolem l'a montré le premier, d'un formalisme plus restreint de l'« arithmétique récurrente », qui est encore susceptible d'une interprétation directe finiste.

Le formalisme dont nous parlons ici se distingue de l'arithmétique récurrente et aussi de l'arithmetique intuitionniste par l'emploi inconditionnel des notions « tous » et « il existe ».

Cependant, dans le domaine des raisonnements qui se laissent représenter dans le formalisme arithmétique, l'accord peut s'établir entre les partisans

nen.

(Der Begriff der „kleinsten Zahl von einer gewissen Eigenschaft“, der in arithmetischen Ableitungen vorkommt, kann in Untersuchungen zur Widerspruchsfreiheit durch das Eliminationsverfahren für solche Terme wie „derjenige, welcher . . . “ beseitigt werden.)

Dieser Kalkül übersteigt bereits die zur Formalisierung der Arithmetik der natürlichen Zahlen unbedingt notwendigen Mittel. In der Tat reicht, wie Skolem als erster gezeigt hat, für diesen Zweck ein beschränkterer Formalismus der „rekursiven Arithmetik“, der einer direkten finiten Interpretation noch fähig ist.

Der Formalismus, von dem wir hier reden, unterscheidet sich von der rekursiven wie auch der intuitionistischen Arithmetik durch den uneingeschränkten Gebrauch der Begriffe „alle“ und „es gibt“.

Indessen, für den Bereich von Schlußweisen, die sich im arithmetischen Formalismus darstellen lassen, kann sich zwischen den Anhängern der klassischen des mathématiques classiques, qui considèrent tous ces raisonnements comme légitimes, et les intuitionnistes qui ne reconnaissent pas généralement le principe du tiers exclu : Les premiers n'auront qu'à déclarer : Une proposition telle que « Il y a un x possédant la propriété A » ne doit être qu'une variante de la seconde proposition que voici : « La négation de A ne vaut certainement pas pour tous les x« . Et de même, une pro[145]||[146]position de la forme « A ou B » ne doit être qu'une variante de la proposition « non-A et non-B ne subsistent pas simultanément ».

Mathematik, die alle diese Schlußweisen als legitim erachten, und den Intuitionisten, die im allgemeinen das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten nicht anerkennen, Übereinstimmung einstellen. Die ersten brauchen nur zu bestimmen, daß eine Aussage wie: „Es gibt ein x von der Eigenschaft A“, lediglich die Lesart einer zweiten Aussage sein soll, nämlich: „Die Negation von A gilt nicht für alle x.“ Und ebenso soll eine Aus||sage der Form „A oder B“ nur eine Lesart der Aussage „non-A und non-B sind nicht gleichzeitig wahr“ sein.

Avec cette interprétation du jugement existentiel et de la disjonction, l'intuitionniste doit admettre comme légitimes tous les raisonnements du domaine susindiqué des mathématiques classiques, tout au moins s'il accepte les régles systématiques du raisonnement intuitionniste indiquées par Heyting.

Mit dieser Interpretation des Existentialurteils und der Disjunktion muß der Intuitionist alle Schlußweisen des oben angegebenen Bereichs klassischer Mathematik als gültig anerkennen, zumindest wenn er die von Heyting angegeben systematischen Regeln intuitionistischen Schließens annimmt.

La constatation d'un rapport aussi intime entre les raisonnements de l'arith-

Die Feststellung einer so engen Beziehung zwischen den Schlußweisen der métique intuitionniste et ceux de l'arithmétique classique permet d'abord de conclure immédiatement à la non-contradiction du formalisme arithmétique ordinaire du point de vue de l'intuitionnisme. On voit en même temps qu'il existe une différence essentielle entre les points de vue intuitionniste et finitiste. En particulier, on remarquera la différence suivante concernant les propositions générales : Tandis que l'intuitionnisme se borne à contester l'application du teirs exclu à de pareilles propositions, la méthode finitiste évite par principe la négation de toute proposition générale, de même que son emploi comme antécédent dans une proposition hypothétique.

intuitionistischen Arithmetik und denen der klassischen Arithmetik erlaubt, vom Standpunkt des Intuitionsimus aus, zunächst unmittelbar auf die Widerspruchsfreiheit des gewöhnlichen arithmetischen Formalismus' zu schließen. Zur gleichen Zeit sieht man, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen dem intuitionistischen und finiten Standpunkt besteht. Im Besonderen wird man den folgenden Unterschied, der die Allsätze betrifft, bemerken: Während sich der Intuitionismus damit genügt, die Anwendung vom ausgeschlossenen Dritten auf derartige Sätze zu bestreiten, vermeidet die finite Methode aus Prinzip die Verneinung jeglicher Allsätze ebenso wie ihren Gebrauch als Prämisse eines Bedingungssatzes.

Du point de vue finiste, la négation d'une proposition n'a de sens que si elle équivaut à une proposition affirmative. Ainsi par exemple, la proposition négative que voici : Le chiffre a n'est pas identique au chiffre b, signifie la même chose que la proposition affirmative : « Le

Vom finiten Standpunkt aus gesehen, hat die Negation einer Aussage nur einen Sinn, wenn sie mit einer bejahenden Aussage äquivalent ist. So bezeichnet zum Beispiel die verneinende Aussage: „Die Ziffer a ist nicht identisch mit der Ziffer b“, dasselbe wie die bejahende Aus-chiffre a est différent du chiffre b ». Et de même, une condition ou une hypothèse n'est à considérer comme finie que si elle est relative à une configuration ou à une opération intuitivement données ou aussi au résultat d'une opération de ce genre. Ainsi par exemple, la supposition que le (grand) théorème de Fermat est vrai, n'est pas finie ; en revanche, la supposition que a, b, c, n soient quatre chiffres tels que $n > 2$ et $a^n + b^n = c^n$ – en un mot, la supposition que les quatre chiffres, a, b, c, n fournissent un contre-exemple pour le théorème de Fermat – est finie. Ou bien encore : L'hypothèse de la déductibilité de ce même théorème au moyen du formalisme arithmétique est finie en ce sens que l'on imaginerait donnée une figure de formules ayant les propriétés d'une déduction formelle dans le formalisme arithmétique dont la formule terminale représenterait le théorème de Fermat. En re[146]||[147]vanche, la supposition que l'on aurait simplement donné quelque démonstration convaincante du grand théorème der Fermat n'est pas fi-

sage: „Die Ziffer a ist von der Ziffer b verschieden.“ Und ebenso kann eine Bedingung oder Hypothese nur als finit angesehen werden, wenn sie auf eine anschaulich [intuitivement] gegebene Anordnung oder Operation oder aber auf das Ergebnis einer solchen Operation bezogen ist. So ist zum Beispiel die Annahme, daß der große Satz von Fermat wahr sei, nicht finit; dafür ist die Annahme, a, b, c, n seien vier Ziffern, mit $n > 2$ und $a^n + b^n = c^n$ – kurz, die Annahme, die vier Zahlen a, b, c, n lieferten ein Gegenbeispiel für den Fermatschen Satz – finit. Oder, um noch ein anderes Beispiel zu nennen, die Hypothese der Ableitbarkeit eben dieses Satzes mittels des arithmetischen Formalismus' ist in dem Sinne finit, als man sich eine Figur von Formeln als gegeben vorstellen könnte, die die Eigenschaften einer formalen Ableitung im arithmetischen Formalismus hat und deren letzte Formel den Satz von Fermat darstellte. Die Annahme da||gegen, man habe einfach einen schlagenden Beweis für den großen Fermatschen Satz gegenie.

Il est vrai que les négations et par conséquent les négations de propositions générales peuvent être éliminées des raisonnements intuitionnistes. En distinguant arbitrairement une proposition élémentaire fausse, par exemple $0 = 1$, on peut interpréter la négation $\overline{A}$ d'une proposition A par l'implication $A \to 0 = 1$. (L'hypothèse A a pour conséquence $0 = 1$.)

Moyennant cette interprétation, les raisonnements intuitionnistes employant la négation se transforment en de nouveaux raisonnements égalment recevables du point de vue intuitionniste et ne contenant plus de négation. Mais l'élimination de la négation ainsi obtenue n'est qu'apparente, car on se voit obligé d'introduire des hypothèses irréelles. En d'autres termes, il s'introduit des implications $A \to B$, qui sont à interpréter dans un sens irréel imaginaire : à supposer que A fût, B s'ensuivrait.

ben, ist nicht finit.

Es ist wahr, daß Negationen und folglich die Negationen von Allsätzen aus intuitionistischen Schlußweisen eliminiert werden können. Durch beliebige Wahl eines elementaren falschen Satzes, z. B. $0 = 1$, kann man die Negation $\overline{A}$ einer Aussage A durch die Implikation $A \to 0 = 1$ interpretieren. (Die Hypothese A hat $0 = 1$ zur Folge.)

Intuitionistische Schlußweisen, welche die Negation verwenden, verwandeln sich mittels dieser Interpretation in neue vom intuitionistischen Gesichtspunkt aus gleichermassen zulässige Schlußweisen, aber enthalten keine Negation mehr. Die so gewonnene Eliminierung der Negation ist jedoch nur eine scheinbare, denn man sieht sich genötigt, irreale Hypothesen einzuführen. Mit anderen Worten, es schleichen sich Implikationen $A \to B$ ein, die in einem eingebildet irrealen Sinne zu interpretieren sind: Aus der Annahme von A, ergäbe sich B.

Il est à remarquer que cette argumentation indirecte s'impose non seulement pour des propositions élémentaires A, auquel cas cette argumentation serait aussi admissible du point de vue intuituionniste, elle s'introduit au contraire aussi pour des propositions générales, pour des implications avec des propositions générales comme antécédents, et même pour des propositions de forme encore plus compliquée.

Es ist zu bemerken, daß sich diese indirekte Beweisführung nicht nur für elementare Aussagen A anbietet, in welchem Fall dieses Argument auch vom intuitionistischen Gesichtspunkt aus zulässig wäre; im Gegenteil, sie bietet sich auch für Allsätze an, für Implikationen mit Allsätzen als Prämisse und selbst für Aussagen mit noch komplizierterer Form.

En tous cas, l'usage de la notion d'« absurdité » relativement à des propositions de forme quelconque subsiste comme moyen spécifique des raisonnements intuitionnistes.

Auf jedem Fall bleibt der Gebrauch des Begriffes der „Absurdität", bezogen auf Aussagen beliebiger Form, als ein eigentümliches Mittel intuitionistischen Schließens in Kraft.

Considération prise du fait que le point de vue finiste s'est révélé trop étroit pour les besoins de la métamathématique, la question suivante se poserait maintenant : Est-il nécessaire de reprendre toutes les suppositions méthodiques de l'intuitionnisme au compte de la théorie de la démonstration ?

In Anbetracht der Tatsache, daß sich der finite Gesichtspunkt als zu eng für die Bedürfnisse der Metamathematik erwiesen hat, stellte sich nun folgende Frage: Ist es mit Hinsicht auf die Beweistheorie notwendig, alle methodischen Annahmen des Intuitionismus aufzugreifen?

Pour l'instant, nous répondrons au

Für den Augenblick werden wir diese

moins partiellement à cette question. En effet, pour le formalisme arithmétique, Gentzen a fourni une démonstration de non-contradiction dont les suppositions méthodiques représentent un terme intermédiaire entre le [147]||[148] point de vue finitiste et l'intuitionnisme. Il est bon de se rapporter ici à la seconde démonstration de Gentzen, qui se recommande non seulement par la mise en évidence de l'idée directrice, mais aussi par l'exclusion de certains moyens méthodiques compliqués. Récemment cette deuxième demonstration de Gentzen a encore été simplifiée par Kalmár qui montra en même temps que la transformation du formalisme arithmétique auquel Gentzen avait eu recours n'est pas nécessaire pour ce but. Pour faire voir de quelle façon Gentzen dépasse les méthodes finies, nous allons indiquer le schéma logique de sa démonstration (avec quelques petites variations).

Frage zumindest teilweise beantworten. Für den arithmetischen Formalismus hat Gentzen in der Tat einen Widerspruchsfreiheitsbeweis erbracht, dessen methodische Annahmen eine Mittelstellung zwischen dem || finiten Standpunkt und dem Intuionismus einnehmen. Es ist angebracht, sich hier auf den zweiten Beweis Gentzens zu beziehen, der sich nicht nur durch die Hervorhebung der Leitidee empfiehlt, sondern auch durch die Vermeidung gewisser komplizierter methodischer Mittel. Kürzlich ist dieser zweite Gentzensche Beweis durch Kalmár nochmals vereinfacht worden. Er zeigte dabei zugleich, daß die Umwandlung des arithmetischen Formalismus', auf die Gentzen zurückgriff, für diesen Zweck nicht notwendig ist. Um ersichtlich zu machen, auf welche Art und Weise Gentzen über die finiten Methoden hinausgeht, werden wir jetzt das logische Gerüst seines Beweises (mit einigen kleinen Abänderungen) angeben.

En vertu d'une remarque déjà employée dans les démonstrations antérieures de

Nach einer bereits in früheren Widerspruchsfreiheitsbeweisen gebrauchten non-contradiction, affirmer la non-contradiction du formalisme arithmétique revient à affirmer la non-déducibilité de la formule $0 = 1$, – désignons-la par F –, c'est-à-dire à affirmer que toute déduction dans ce formalisme a une formule terminale différente de F. Si l'on se borne à des déductions où n'interviennent ni l'induction complète, ni les règles relatives à « tous » et « il existe », – nous les nommerons des déductions élémentaires, – on peut s'en rendre compte de façon directe.

Bemerkung, läuft ein Behaupten der Widerspruchsfreiheit des arithmetischen Formalismus auf die behauptete Nicht-Ableitbarkeit der Formel $0 = 1$ – wir bezeichen sie mit F – hinaus, d. h. zu behaupten, daß jede Ableitung in diesem Formalismus eine von F verschiedene Endformel besitzt. Man kann sich darüber in direkter Weise Klarheit verschaffen, wenn man sich auf Ableitungen beschränkt – wir nennen sie elementare Ableitungen –, in denen weder vollständige Induktion noch auf „alle" und „es gibt" bezogene Regeln vorkommen.

Pour la démonstration générale, Gentzen fait intervenir des nombres ordinaux appartenant à un certain segment des deux premières classes cantoriennes (plus précisément le segment antérieur au premier ϵ de Cantor). L'introduction de ces nombres peut d'ailleurs se faire de façon indépendante, sans avoir recours à la théorie de Cantor : ils peuvent être caratérisés comme étant certaines figures (finies) pour lesquelles une relation

Gentzen setzt im Gang des Beweises Ordinalzahlen ein, die einem bestimmten Abschnitt der zwei ersten Cantorschen Zahlklassen angehören (genauer, dem Abschnitt vor der ersten Cantorschen ϵ-Zahl). Die Einführung dieser Zahlen ist übrigens auf unabhängige Weise, ohne Rückgriff auf die Theorie Cantors, möglich. Die Zahlen können als gewisse (endliche) Figuren charakterisiert werden, für welche man eine „kleiner-" oder

« plus petit » ou « plus grand », ayant les propriétés d'une relation d'ordre, peut être intuitivement définie, – et de telle façon que pour deux nombres ordinaux différents on puisse toujours décider lequel des deux est le plus grand.

On assigne alors, par un simple procédé progressif, à chaque déduction appartenant au formalisme arithmétique un de ces nombres ordinaux, et l'on peut maintenant, pour toute déduction non-élémentaire, passer à une déduction possédant la même formule terminale et à laquelle est attribuée un nombre ordinal plus petit. La conséquence en est la suivante : Si toute déduction possé[148]||[149]dant un ordinal inférieur à α a une formule terminale différente de F, il en est de même pour toute déduction d'ordinal α.

Jusqu'ici, la démonstration ne sort pas des limites du point de vue finitiste.

Pour parvenir maintenant de cette conséquence au résultat que toute déduction du formalisme arithmétique possède une

„größer-Relation", die die Eigenschaften einer Ordnungsrelation besitzt, anschaulich [intuitivement] definieren kann – in solcher Weise, daß für zwei verschiedene Ordinalzahlen stets entschieden werden kann, welche von beiden die größere ist.

Man ordnet dann (durch ein einfaches fortschreitendes Verfahren) jeder Ableitung im arithmetischen Formalismus eine dieser Ordinalzahlen zu, und kann jetzt bei allen nicht-elementaren Ableitungen zu einer Ableitung übergehen, die die gleiche Endformel besitzt und welcher eine kleinere Ordinalzahl zukommt. Dies hat folgendes zur Konsequenz: Wenn jede Ableitung mit einer Ordinalzahl unterhalb von α eine von F verschiedene Endformel hat, so gilt dies auch für jede Ableitung der Ordinalzahl α.

Bis hierhin verläßt der Beweis nicht die Grenzen des finiten Standpunktes.

Um nun von dieser Konsequenz zum Ergebnis zu gelangen, daß jede Ableitung im arithmetischen Formalismus eine von formule terminale différente de F – ce qui est précisément le fait à démontrer – il est encore nécessaire de justifier le principe de raisonnement suivant :

« Si une propriété $B(\alpha)$ relative à un ordinal α est d'abord valable pour 0 (le plus petit des α) et si elle est valable pour α pourvu qu'elle le soit pour les ordininaux antérieurs, alors elle est valable pour tous les α. »

Ce principe est une sorte de généralisation de l'induction complète. Dans la théorie des ensembles, un principe d'induction de ce genre est appelé principe d'induction transfinie puisqu'il s'étend à des nombres transfinis. Cependant pour nos besoins, cette expression n'est pas appropriée, car nous employons le mot « fini » dans un certain sens méthodique qui est tel que la différence entre induction ordinaire (passage de n à $n+1$) et induction transfinie ne coïncide aucunement avec la différence entre raisonnement fini et non-fini.

F verschiedene Endformel besitzt – was genau das ist, was zu zeigen ist –, ist es noch notwendig, das folgende Schlußprinzip zu rechtfertigen:

„Wenn eine auf eine Ordinalzahl α bezogene Eigenschaft $B(\alpha)$ erstens auf 0 (die kleinste der α's) zutrifft, und wenn sie auf α zutrifft, vorausgesetzt sie trifft auf alle vorangehenden Ordinalzahlen zu, dann trifft sie auf alle α zu."

Dieses Prinzip ist eine Art Verallgemeinerung der vollständigen Induktion. Ein Induktionsprinzip dieser Art wird in der Mengenlehre Prinzip der transfiniten Induktion genannt, da es sich auf transfinite Zahlen erstreckt. Indessen ist dieser Ausdruck für unsere Bedürfnisse unangebracht; denn wir verwenden das Wort „finit" in einem bestimmten methodischen Sinn, wonach der Unterschied zwischen gewöhnlicher Induktion (Übergang von n zu $n+1$) und transfiniter Induktion keinesfalls mit dem Unterschied zwischen finiter und nicht-finiter Denkweise zusammenfällt.

D'une part, il se peut qu'une induction complète ordinaire ne soit pas finie dans notre sens, si la propriété dont il est question pour un n a une structure logique compliquée. Et d'autre part, il existe des inductions transfinies au sens usuel qui ont encore le caractère d'un raisonnement fini.

Il s'agit ici pour nous moins de fixer les limites exactes jusqu'où l'induction possède un caractère fini que de nous rendre compte intuitivement, en quoi consiste la légimitité du principe de raisonnement énoncé plus haut, et pourquoi il représente une généralisation appropriée de l'induction ordinaire.

Rappelons-nous comment on justifie l'induction ordinaire, du point de vue intuitif : On fait la supposition que A vaut pour 0, et que nous pouvons conclure de n à $n+1$. Alors, de la même [149]||[150] façon que nous pouvons parvenir à un entier n quelconque par une simple répétition de la progression d'une unité, nous pouvons

Einerseits ist es möglich, daß eine gewöhnliche Induktion, falls die Eigenschaft, die für ein n in Rede steht, eine logisch komplizierte Struktur hat, nicht finit in unserem Sinne wäre. Andererseits gibt es dem üblichen Sinne nach transfinite Induktionen, die noch den Charakter finiten Denkens haben.

Für uns geht es hier weniger darum, die genauen Grenzen (bis wohin Induktion noch finiten Charakter besitzt) festzulegen, als vielmehr inhaltlich [intuitivement] einzusehen, worin die Legitimität des oben angeführten Schlußprinzips besteht und warum es eine sachgemäße Verallgemeinerung der gewöhnlichen Induktion darstellt.

Erinnern wir uns wie man – vom inhaltlichen [intuitif] Gesichtspunkt aus – die gewöhnliche Induktion rechtfertigt: Man macht die Annahme, daß A für 0 gilt und wir von n auf $n+1$ schließen können. Auf die gleiche || Weise, wie wir zu einer beliebigen natürlichen Zahl n durch eine einfache Wiederholung von Nachfolconclure de $A(0)$ à $A(n)$.

Or le type d'ordre des ordinaux considérés est analogue à celui de la suite naturelle des entiers en ce qu'il possède aussi la propriété du bon ordre : après chaque segment vient un élément qui le suit immédiatement. De plus le type de ce bon ordre peut être réduit de manière récurrente au type de la suite naturelle des entiers. De cette façon il devient possible de « parcourir » en quelque sorte tout segment du type d'ordre considéré. C'est dans ce sens qu'on parle, dans la théorie cantorienne des ensembles, d'une numérotation au delà de l'infini.

Cette numérotation transfinie ne doit pas être comprise comme exigeant, pour être effectuable, une représentation intuitive d'un infini actuel. Ce dont il s'agit, c'est du passage d'un processus progressif à sa conception métamathématique, de façon analogue à ce qui passe déjà

gerschritten gelangen, können wir dann auch von $A(0)$ auf $A(n)$ schließen.

Nun ist der Ordnungstypus der betrachteten Ordinalzahlen analog demjenigen der natürlichen Folge der natürlichen Zahlen, insofern auch er die Eigenschaft der Wohlordnung besitzt: Nach jedem Abschnitt kommt ein Element, das diesem unmittelbar folgt. Außerdem kann der Wohlordnungstypus in rekursiver Weise auf die natürliche Folge der natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. Auf diese Weise wird es möglich, gewissermaßen alle Abschnitte des betrachteten Ordnungstypus' zu „durchlaufen". Dies ist, in der Redeweise der Cantorschen Mengenlehre, ein Zählen über das Unendliche hinaus.

Diese transfinite Abzählung darf nicht so verstanden werden, als verlange sie, um durchführbar zu sein, eine anschauliche [intuitive] Vorstellung vom aktuell Unendlichen. Das, worum es geht, ist der Übergang von einem fortschreitenden Prozeß zu seiner metamathemadans l'induction complète, lorsque nous dépassons la constatation progressive des propositions particulières $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$,... par la constatation générale métamathématique que nous pouvons parvenir à $A(n)$ pour tout n.

tischen Auffassung; in analoger Weise zu dem, der schon bei der vollständigen Induktion erfolgt, wenn wir die fortschreitende Feststellung der einzelnen Aussagen $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, durch die allgemeine metamathematische Feststellung überschreiten, daß wir zu $A(n)$, für alle n, gelangen können.

La différence avec l'induction complète ordinaire consiste, dans le cas du type d'ordre envisagé, dans le fait que des induction superposées interviennent, c'est-à-dire que l'on obtient des inductions supérieures à partir de l'induction ordinaire en appliquant les considérations métamathématiques susindiquées même aux procédés d'iteration des inductions. En termes de logique, cette superposition d'inductions s'exprime par une superposition de propositions hypothétiques dans lesquelles des propositions générales (Allsätze) interviennent comme antécédents. Ces propositions générales – remarquons-le – sont toujours des propositions qui trouvent leur confirmation dans l'aboutissement même du raison-

Im Fall des betrachteten Ordnungstypus' besteht der Unterschied zur gewöhnlichen vollständigen Induktion in der Tatsache, daß ineinandergeschachtelte Induktionen beteiligt sind; d. h., daß man höhere Induktionen aus gewöhnlichen Induktionen durch Anwendung der oben angegebenen metamathematischen Betrachtungen auf Iterationsprozesse von Induktionen erhält. Logisch formuliert drückt sich diese Schachtelung von Induktionen durch eine Schachtelung von Bedingungssätzen aus, bei welchen die Allsätze als Prämisse auftreten. Diese Allsätze – man beachte dies – sind stets Aussagen, die ihre nachträgliche Bestätigung im Ergebnis des Schlusses selbst finden; die hypothetische Form nement ; la forme hypothétique de ces propositions a donc la signification de l'anticipation d'une étape dans un processus progressif.

dieser Aussagen hat folglich die Bedeutung der Vorwegnahme eines Schrittes in einem fortschreitenden Prozeß.

En définitive, l'emploi de l'induction transfinie revient à un certain élargissement du cadre méthodique de la théorie de la [150]||[151] démonstration, mais non à une acceptation entière des raisonnement intuitionnistes.

Letzten Endes läuft der Gebrauch transfiniter Induktion auf eine gewisse Erweiterung des methodischen Rahmens der Beweis||theorie hinaus, aber keineswegs auf die völlige Annahme intuitionistischer Schlußweisen.

Ce procédé d'élargissement est luimême, en principe, susceptible d'être généralisé, car il est possible de s'élever aussi à la conception intuitive de types ordinaux plus élevés que celui dont Gentzen se sert (le premier ϵ de Cantor) et de justifier intuitivement le principe correspondant d'induction transfinie.

Grundsätzlich ist dieses Erweitungsverfahren selbst einer Verallgemeinerung fähig. Denn es ist möglich, sich auch zur anschaulichen [intuitive] Vorstellung höherer Ordinaltypen als derjenigen, deren sich Gentzen bedient (die erste ϵ-Zahl Cantors), emporzuarbeiten und das korrespondierende Prinzip transfiniter Induktion inhaltlich [intuitivement] zu rechtfertigen.

Pour l'instant, il est impossible de juger si l'adjonction d'un principe d'induction supérieur de ce genre aux méthodes finitistes pourra fournir les moyens suffisants pour une démonstration de non-

Im Augenblick ist kein Urteil darüber möglich, ob die Hinzufügung eines höheren Induktionsprinzips dieser Art zu den finiten Methoden die hinreichenden Mittel für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis contradiction de l'analyse.

D'après le théorème général de Gödel sur les propositions non formellement déductibles, le principe d'induction en question – qui, dans tous les cas pourrait être formulé comme un théorème sur un certain bon ordre de la suite naturelle des entiers – devrait être tel que sa déduction ne pût être effectuée dans le cadre de l'analyse formalisée.

Tout d'abord il semble impossible de satisfaire à cette exigence : car la théorie générale du bon ordre de la suite naturelle, y compris le théorème général de l'induction transfinie, peut être établie au sein d'un formalisme assez naturel de l'analyse. Cependant, il faut se rappeler que le théorème général de l'induction transfinie ne décide pas encore si un ordre proposé de la suite des entiers est aussi un bon ordre ; or le principe d'induction supérieur en question pourrait justement revenir à une telle affirmation.

der Analysis wird liefern können.

Nach dem allgemeinen Satz Gödels über formal unableitbare Aussagen müßte das fragliche Induktionsprinzip – das in allen Fällen als ein Satz über eine gewisse Wohlordnung der natürlichen Folge der natürlichen Zahlen formuliert werden kann – dergestalt sein, daß seine Ableitung im Rahmen der formalisierten Analysis nicht erreicht werden kann.

Zunächst scheint es unmöglich, dieser Forderung zu genügen. Denn die allgemeine Wohlordnungstheorie der natürlichen Folge, den allgemeinen Satz der transfiniten Induktion mit einbegriffen, kann inmitten eines ziemlich natürlichen Formalismus' der Analysis entwickelt werden. Indessen muß man sich in Erinnerung rufen, daß der allgemeine Satz der transfiniten Induktion noch nicht entscheidet, ob eine gegebene Ordnung der Folge der natürlichen Zahlen auch eine Wohlordnung ist. Das in Frage stehende, höhere Induktionsprinzip könnte aber gerade auf eine solche Behauptung hinauslaufen.

De toutes façons, et compte tenu des considérations précédentes, il ne paraît pas indiqué de délimiter *a priori* le cadre méthodique pour les recherches métamathématiques. L'espoir que le point de vue finitiste (dans son sens originel) pourrait suffir pour tout la théorie de la démonstration, fut suscité par le fait que les problèmes relatifs à cette théorie peuvent être énoncés déjà de ce point de vue. Mais il n'y a pas de relation générale simple entre la possibilité d'énoncer et celle de démontrer une proposition, et par conséquent non plus entre la formulation et la résolution d'un problème. [151]‖[152]

Wie dem auch sei – und mit Rücksicht auf die vorangegangenen Betrachtungen –, es scheint nicht angezeigt, den methodischen Rahmen für metamathematische Untersuchungen apriorisch zu begrenzen. Die Hoffnung, daß der finite Standpunkt (im ursprünglichen Sinne) für die gesamte Beweistheorie ausreichen könnte, wurde durch die Tatsache geweckt, daß die auf diese Theorie bezogenen Probleme bereits von diesem Standpunkt aus formuliert werden können. Aber es gibt keine einfache und generelle Beziehung zwischen der Möglichkeit, eine Aussage zu formulieren, und derjenigen, sie zu beweisen, und folglich ebenso wenig zwischen der Formulierung und der Lösung eines Problems. ‖

Maintenant la question se pose de savoir quel est le caractère de la limitation méthodique des moyens de la théorie de la démonstration, si cette dernière ne consiste pas dans l'exigence de l'évidence élémentaire, qui distingue le point de vue

Jetzt stellt sich die Frage, welchen Charakter die methodische Begrenzung der beweistheoretischen Mittel hat, wenn diese letztere nicht in der Forderung nach elementarer Evidenz besteht, die den finiten Standpunkt auszeichnet. Die finitiste. La réponse est la suivante : La tendance de la limitation méthodique reste au fond la même ; cependant il ne faut pas concevoir l'évidence et la sûreté de façon trop absolue, si l'on veut conserver ouverte la possibilité d'élargir le cadre méthodique. D'autre part, en procédant ainsi, on s'assure l'avantage de ne pas être obligé de déclarer illégitimes ou douteuses les méthodes traditionelles de l'analyse.

Le caractère spécifique du point de vue hilbertienne doit être aperçu en ceci : on s'attache à ne pas sortir d'un mode de raisonnement arithmétique au sens strict, tandis que les méthodes habituelles de l'analyse et de la théorie des ensembles s'inspirent pour une part essentielle, d'idées géométriques et en tirent leur force d'évidence. En effet, on peut dire – et c'est sûrement l'essentiel des critiques finitistes et intuitionnistes des méthodes usuelles en mathématiques – que l'arithmétisation de la géometrie, dans l'analyse et la théorie des en-

Antwort ist die folgende. Die Tendenz zur methodischen Begrenzung bleibt im Grunde dieselbe; indessen darf die Evidenz und die Sicherheit nicht in gänzlich absoluter Weise begriffen werden, wenn man die Möglichkeit offen halten will, den methodischen Rahmen zu erweitern. Geht man so vor, versichert man sich andererseits des Vorteils nicht verpflichtet zu sein, die traditionellen Methoden der Analysis für unrechtmäßig oder zweifelhalt zu erklären.

Der spezifische Charakter des Hilbertschen Standpunktes muß hierin erblickt werden: Man verpflichtet sich, keinen Fingerbreit von einer im strikten Sinne arithmetischen Denkweise abzugehen, während die gewohnheitsmäßigen Methoden der Analysis und der Mengenlehre sich zu einem wesentlichen Teil aus geometrischen Ideen speisen und daraus ihre evidentielle Kraft ziehen. Man kann in der Tat sagen – und dies ist sicherlich das Wesentliche der finitistischen und intuitionistischen Kritik an den üblichen Methoden in der Mathematik –, daß die sembles, n'est pas intégrale.

La tendance méthodique de la théorie hilbertienne de la démonstration peut contribuer à développer et à mieux faire valoir la pensée spécifiquement arithmétique et à faire mieux apparaître les étapes des démarches arithmétiques.

Par ailleurs, dans le jugement porté sur les résultats de la théorie de la démonstration, il faut relever que les démonstrations de la non-contradiction du formalisme arithmétique ne représentent aucunement les seuls progrès réalisés par les recherches métamathématiques dans les dernières années. En particulier, dans les problèmes de la décidabilité et de la caculabilité effective, des résultats très remarquables ont été obtenus par les travaux de Gödel, Church, Turing, Kleene et Rosser.

La métamathématique a d'ores et déjà une signification telle que son importance peut être appréciée indépendamment de

Arithmetisierung der Geometrie in Analysis und Mengenlehre keine vollständige ist.

Die methodische Ausrichtung der Hilbertschen Beweistheorie kann zur Entwicklung und besseren Einschätzung des spezifisch arithmetischen Denkens und zur deutlicheren Herausstellung der Entwicklungsstufen arithmetischer Vorgehensweisen beitragen.

Außerdem muß im Urteil über die Ergebnisse der Beweistheorie deutlich werden, daß die Widerspruchsfreiheitsbeweise für den arithmetischen Formalismus keineswegs die einzigen Fortschritte darstellen, die in den metamathematischen Untersuchungen der letzten Jahre gemacht wurden. Insbesondere zu den Problemen der Entscheidbarkeit und der effektiven Berechenbarkeit sind durch die Arbeiten von Gödel, Church, Turing, Kleene und Rosser sehr bemerkenswerte Ergebnisse erreicht worden.

Die Metamathematik hat von nun an eine solche Bedeutung, daß ihre Wichtigkeit unabhängig von jeglicher philotoute doctrine philosophique sur les fondements. [152]‖[153]

sophischen Lehre über die Grundlagen gewürdigt werden kann. ‖